Hipotézis tesztről egy prekogníciós kísérlet ürügyén

Hraskó Péter[1]

1.A kísérlet és hagyományos kiértékelése

A prekogníciós kísérletet, amelyről szó lesz, *Vassy Zoltán* végezte el [1]. A kísérletben egy pszeudo-véletlen generátor gyors egymásutánban 0 és 1 karaktereket generált. A kísérleti személy feladata az volt, hogy *előre jelezze*, amikor a generált karakter 1-s *lesz* (a részleteket ld. az idézett cikkben).

Mindegyik kísérleti személy egy ülésben $n = 36$ próbát tett és összesen $N = 100$ ülés történt. Az egyes üléseken a találatok számát x_i-vel jelöljük ($i = 0, 1, 2, \dots 100$) Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

23	22	27	20	13	13	16	20	14	20
19	20	20	20	21	17	20	23	14	16
17	11	23	17	12	22	21	15	24	13
17	16	16	22	18	18	20	15	12	17
22	12	21	19	24	20	14	20	16	23
20	17	22	26	15	18	17	16	14	24
21	17	23	19	15	18	24	20	16	20
19	25	17	19	20	17	18	20	18	21
14	16	18	14	21	21	22	16	13	14
22	20	20	17	16	20	15	14	18	24

A találatok száma az egyes üléseken

(az egy oszlopban található adatok egy adott kísérleti személyhez tartoznak, de a továbbiakban ennek nem lesz jelentősége).

Elfogadott világképünk szerint a kísérleti személy nem tudhatja előre, milyen karaktert ad ki a generátor a következő pillanatban, ezért azt várjuk, hogy a találat valószínűségét a $p = 1/2$ valószínűségű binomiális eloszlás írja le, amelynek varianciája 1/4-del egyenlő. Egy ülésre kivetítve ez átlagosan 18 találatot jelent $\sigma_0^2 = 36 \times 1/4 = 9$ varianciával. Az eloszlás jó közelítésben gaussinak vehető. Ez a *null-hipotézisünk*, amelyet tesztelni kívánunk.

[1] Ez a cikk nem születhetett volna meg azok nélkül a diszkussziók nélkül, amelyeket az évek során Gábor fiammal folytattam, elsősorban a Randi-alapítvány keretei között tervezett, de soha meg nem valósult nagyszabású homeopátia-teszt kapcsán.

Az empirikus átlag 18.46-tal egyenlő, amely 5%-os szinten nem szignifikáns (a 0.1914 p-érték nagyobb 0.05-nél). A khi-négyzet-próba ([2] 7.fejezet) azonban mást mutat. A mintából képzett χ^2 ugyanis[2]

$$\chi^2 = \frac{\sum_1^{100}(x_i - 18)^2}{\sigma_0^2} = 136.8889. \tag{1}$$

A [2] B.6 táblázata szerint ez az érték 1%-os szinten *szignifikáns* (a p-érték majdnem pontosan 0.01-gyel egyenlő). A szignifikancia-tesztek mára kialakult felfogása szerint ez arra utal, hogy a null-hipotézist el kell vetni és a prekogníció lehetőségét komolyan kell venni. Vassy cikkének címében a második rész erre utal.

2.A bayesi megközelítés

Létezik azonban egy másik kiértékelési eljárás is. A kísérlet indítéka nyilván annak megvizsgálása volt, hogy a null-hipotézis (amelyet a továbbiakban A-hipotézisnek fogunk nevezni) érvényes-e. A khi-négyzet-próba szignifikanciája következtében ez kétségessé vált, és a kísérletezőben megfogalmazódott egy alternatív B hipotézis, amely szerint a szórás lehet nagyobb, mint amennyi az A-hipotézis alapján várható. A kísérlet eredménye megengedi, hogy az egyszerűség kedvéért az átlagra a B hipotézisben is megtartsuk a 18 találatot.

A kérdés mármost nyilván így fogalmazható meg: melyik a valószínűbb, az A vagy a B hipotézis?

Jelöljük a két hipotézis valószínűségét $\mathrm{val}(A|\mathcal{D}, I)$-vel és $\mathrm{val}(B|\mathcal{D}, I)$-vel[3]. A $\mathcal{D}$ a mért x_i találat-számokat reprezentálja (data), az I pedig az összes lényeges háttér-információt. A $\mathrm{val}(A|\mathcal{D}, I)$ eszerint az A hipotézis valószínűsége a táblázatban összefoglalt $\mathcal{D}$ mérési adatok és a lényeges háttérinformációk figyelembe vételével, és természetesen hasonló jelentése van a $\mathrm{val}(B|\mathcal{D}, I)$ valószínűségnek is. A továbbiakban a $\mathrm{val}(B|\mathcal{D}, I)/\,\mathrm{val}(A|\mathcal{D}, I)$

[2]Ha a 18 átlagot a 18.45 empirikus átlaggal helyettesítjük, a χ^2-re a 134.5378 értéket kapjuk. A szignifikancia szint szempontjából a különbség lényegtelen. Mivel a következő fejezetben a (1) alakra lesz szükségünk, erre tartjuk fenn a χ^2 jelölést.

[3]A $\mathrm{val}(|)$ függvény első argumentuma mutatja, minek a valószínűségéről van szó, a második pedig azt, hogy ez a valószínűség milyen feltételek mellett érvényes. Mivel minden valószínűséget egyöntetűen a $\mathrm{val}(|)$ szimbólummal jelölünk, csak az argumentumból derül ki, milyen valószínűségről van szó.

hányados becslését tűzzük ki célul a [3] könyv 4.fejezetének gondolatmenete alapján.

A Bayes-tétel felhasználásával a két valószínűséget átalakíthatjuk a következő módon:

$$\begin{aligned}\operatorname{val}(B|\mathcal{D},I) &= \frac{\operatorname{val}(\mathcal{D}|B,I)\cdot\operatorname{val}(B|I)}{\operatorname{val}(\mathcal{D}|I)}\\ \operatorname{val}(A|\mathcal{D},I) &= \frac{\operatorname{val}(\mathcal{D}|A,I)\cdot\operatorname{val}(B|I)}{\operatorname{val}(\mathcal{D}|I).}.\end{aligned}$$

A számlálók első tényezője a mért adatok valószínűsége a B ill. az A hipotézis érvényessége esetén. Látni fogjuk, hogy a hipotéziseink alapján ezt a két valószínűséget ki lehet számítani. A számlálók második tényezője a hipotézisek valószínűsége a mérési adatok figyelembevétele nélkül, azaz a mérés elvégzése előtt. Ezeket az A és a B *a priori* valószínűségének hívjuk. A baloldali (keresett) mennyiségek ugyanezen hipotézisek valószínűségei a mérés eredményének figyelembe vételével (*a posteriori* valószínűségek).

Végül a nevező, amely mindkét törtben ugyanaz, a $\mathcal{D}$ mérési eredmény valószínűsége bármilyen hipotézis mellett. Ha A, B, C, D, $E\ldots$ az összes egymást kizáró hipotézis, amely $\mathcal{D}$-t megengedi, akkor $\operatorname{val}(\mathcal{D}|I)$ a $\mathcal{D}$ adathalmaznak a hipotézisek valószínűségével súlyozott valószínűsége:

$$\begin{aligned}\operatorname{val}(\mathcal{D}|I) = \operatorname{val}(\mathcal{D}|A,I)\cdot\operatorname{val}(A|I) + \operatorname{val}(\mathcal{D}|B,I)\cdot\operatorname{val}(B|I)+\\ +\operatorname{val}(\mathcal{D}|C,I)\cdot\operatorname{val}(C|I) + \operatorname{val}(\mathcal{D}|D,I)\cdot\operatorname{val}(D|I)+\ldots\end{aligned}$$

Arról természetesen szó sem lehet, hogy ezt valamilyen módon megbecsüljük, de erre nincs is szükség, mert a $\operatorname{val}(B|\mathcal{D},I)/\operatorname{val}(A|\mathcal{D},I)$ törtből kiesik:

$$\frac{\operatorname{val}(B|\mathcal{D},I)}{\operatorname{val}(A|\mathcal{D},I)} = R\cdot\frac{\operatorname{val}(B|I)}{\operatorname{val}(A|I)}, \tag{2}$$

amelyben

$$R = \frac{\operatorname{val}(\mathcal{D}|B,I)}{\operatorname{val}(\mathcal{D}|A,I)} \tag{3}$$

az u.n. *Bayes-arány.* A mérés analízise a Bayes-arány számértéke alapján történik.

Az A hipotézis szerint $\operatorname{val}(\mathcal{D}|A,I)$ az $1/2$ valószínűséghez tartozó binomiális eloszlás, amelyet a

$$\operatorname{val}(\mathcal{D}|A,I) = \frac{1}{\sigma_0^N(2\pi)^{N/2}}\,e^{-\dfrac{\sum(x_k-\mu)^2}{2\sigma_0^2}} \tag{4}$$

Gauss-eloszlással közelítünk ($N = 100$, $\sigma_0^2 = n/4 = 9$, $\mu = n/2 = 18$).

A $\mathrm{val}(\mathcal{D}|B, I)$ számítása nem ilyen egyszerű. Ez ugyanis nem egy határozott varianciájú Gauss-eloszlás, mert a B hipotézis szerint a populációban valamilyen eloszlásban létezik egy olyan (feltehetően prekognícióval kapcsolatos) képesség, amely abban nyilvánul meg, hogy a prekogníciós kísérlet üléseiben a találatok σ varianciája *nagyobb vagy egyenlő*, mint a binomiális eloszláshoz tartozó σ_0^2 érték. Az elsődleges valószínűségünk tehát $\mathrm{val}(\mathcal{D}, \sigma|B, I)$, amely σ-ban is egy valószínűség (pontosabban valószínűségi sűrűség), amelyről csupán annyit tudunk, hogy csak $\sigma \geq \sigma_0$-nál különbözik zérustól. A kísérletünk azonban csak a $\mathcal{D}$ adatokat (az x_k-kat), szolgáltatja, ezért a $\mathrm{val}(\mathcal{D}|B, I)$ valószínűséget $\mathrm{val}(\mathcal{D}, \sigma|B, I)$-ből a σ szerinti marginalizálással kapjuk:

$$\mathrm{val}(\mathcal{D}|B, I) = \int_{\sigma_0}^{\infty} d\sigma \ \mathrm{val}(\mathcal{D}, \sigma|B, I).$$

A feltételes valószínűség definíciója alapján az integrandust át lehet alakítani a következő módon:

$$\mathrm{val}(\mathcal{D}|B, I) = \int_{\sigma_0}^{\infty} d\sigma \ \mathrm{val}(\mathcal{D}|\sigma, I)\,\mathrm{val}(\sigma|B, I), \tag{5}$$

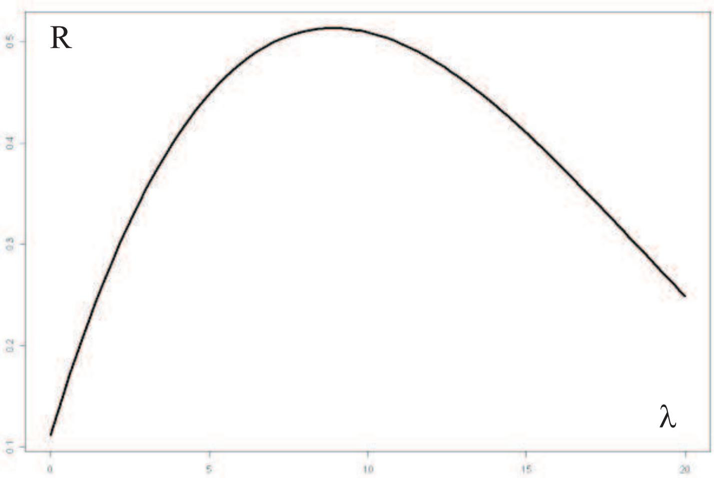
amelyben $\mathrm{val}(\sigma|B, I)$ a σ sűrűsége a B hipotézis és a háttér-információk figyelembevételével. Ezek alapján csak annyit tudunk, hogy

1. $\sigma < \sigma_0$-nál $\mathrm{val}(\sigma|B, I) = 0$,
2. $\mathrm{val}(\sigma_0|B, I) \neq 0$ (mert B szerint a populációban lehetnek olyanok, akik a prekogníciós tesztben a véletlennek megfelelő eredményt produkálják), és
3. $\displaystyle\int_{\sigma_0}^{\infty} d\sigma \ \mathrm{val}(\sigma|B, I) = 1.$

A 3. feltétel azt követeli, hogy amikor $\sigma \longrightarrow \infty$, a $\mathrm{val}(\sigma|B, I)$ legalább olyan gyorsan tartson nullához, mint $1/\sigma^2$, ezért egy lehetséges választás a következő:

$$\mathrm{val}(\sigma|B, I) = \frac{(\lambda + 1)\sigma_0^{\lambda+1}}{\sigma^{\lambda+2}} \qquad (\lambda \geq 0). \tag{6}$$

A λ értékét tetszőlegesen választhatjuk, de ezt az önkényességet ki tudjuk küszöbölni úgy, hogy az analízisben *az összes nemnegatív* λ-ra tekintettel leszünk.



A Bayes-hányados λ-függése χ^2=136.8889-nél

A (6) választás természetesen nem az egyedül lehetséges. Választhatnánk helyette pl. a $(\lambda/\sigma_0)e^{-\lambda(\sigma-\sigma_0)/\sigma_0}$ függvényeket is, amelyek a végtelenben gyorsabban válnak nullává, mint a (6) család. Ebben a dolgozatban azonban ez utóbbit fogjuk használni.

A Bayes-arány a mért χ^2-től, a minta N nagyságától és a λ paramétertől függ. Az $R = R(\chi^2, N, \lambda)$ számítását a Függelékben vázoljuk. Az ábra az $R(136.8889, 100, \lambda)$ függvényt mutatja.

Mint látható, a Bayes-arány sehol sem nő 0.5 fölé. Ebből az következik, hogy a B hipotézis valószínűsége az A valószínűségéhez képest nem válik nagyobbá a tárgyalt mérés következtében.

3.Diszkusszió

A két előző fejezet összehasonlításakor az első dolog, ami szembe ötlik az, hogy egymásnak ellentmondó konklúzióval zárulnak, a második pedig az, hogy a hagyományos eljárás olyan fogalmakkal operál (p-érték, khi-négyzetpróba), amelyeknek a megértése nem lehetséges a matematikai statisztika elég alapos ismerete nélkül, míg a bayesi módszerben a valószínűségszámításnak csak a legelemibb fogalmait használtuk. Ez utóbbi módszerben viszont az jelenti a gondot, hogy a valószínűségekhez, amelyekkel operáltunk, nem rendelhető pontos számérték. Valóban, egy hipotézis valószínűsége bizonyos feltételek mellett teljesen más jellegű, mint annak valószínűsége, hogy a magyarkártya csomagból pirosat húzzunk, vagy hogy egy radioaktív atom a következő másodpercben elbomoljon. Ezekben az esetekben tetszőleges számú megfigyelést végezhetünk azonos körülmények között, és a vizsgált esemény valószínűségét egyenlőnek vehetjük az esemény bekövetkeztének *relatív gyakoriságával*, amelyet ráadásul sok esetben (pl. az előbb idézett első példában, és nagyon gyakran a másodikban is) előre ki tudunk számítani. Egy hipotézis valószínűségénél, vagy egy pszichológiai tulajdonság valamilyen mértékű megléténél erről természetesen szó sem lehet.

Érdekes módon ennek ellenére a kérdést, amelyből a 2. fejezetben kiindultunk (hogy t.i. melyik valószínűbb: az A vagy a B hipotézis) tökéletesen értelmesnek érezzük, nagyon gyakran feltesszük magunknak vagy másoknak, és *kvalitatíve* meg is válaszoljuk pl. így: „Az A sokkal valószínűbb mint a B", vagy „mindkettőt nagyjából egyenlően valószínűnek tarthatjuk". Sokszor még egyetlen hipotézis kapcsán is kijelentjük, hogy „egyáltalán nem valószínű", de alighanem az ilyen esetekben is meghúzódik a háttérben valamilyen viszonyítási alap.

Nagy kérdés, hogy a valószínűségszámítás formalizmusa (a feltételes valószínűség definíciója, a Bayes-tétel, stb) alkalmazható-e az ilyen *szubjektív valószínűségekre*. Ha nem, akkor a 2. fejezetet totál értelmetlenségnek kellene minősítenünk. De több gondolatmenet is ismeretes (a legfontosabb nevek itt *F. P. Ramsey, H. Jeffreys, R. T. Cox*), amely arra a következtetésre jut, hogy a valószínűségszámítás alkalmazható az olyan kvalitatív jellegű valószínűségekre is, amelyek nem értelmezhetők relatív gyakoriságként. Ez azért van így, mert a valószínűségszámítás axiómái összhangban vannak a tudományos következtetés logikájával ([3], [4]), és a valószínűségszámítás az ilyen esetekben tulajdonképpen a tudományos következtetés (részleges) formalizálása.

A *fogadás* az a tipikus helyzet, amikor a szubjektív valószínűség számokban is kifejeződik, ezért amikor szubjektív valószínűségekkel dolgozunk, célszerű a valószínűség helyett az $\mathcal{O}$ *esélyhányadosról* (oddszról) beszélni. Ha arra fogadok, hogy a magyarkártya csomagból a legközelebbi húzásnál piros jön ki, és a bukmékernek felajánlom, hogy erre 1-t teszek 10 ellenében, akkor a bukméker bizonyosan visszautasítaná, mert nyilván ráfizetne. Ha viszont azt mondja, hogy ha én 1-t teszek, akkor ő hajlandó 2-t tenni, akkor én nem fogok belemenni a dologba. Üzletet csak akkor köthetünk, ha én 1-t teszek a bukméker 3-a ellenében (ez volna az „igazságos fogadás"), de ekkor nem lenne semmi értelme az egésznek, mert hosszú távon mindketten a pénzünknél maradnánk.

Fogadásokat azonban mégis kötnek, többnyire olyan esetekben, amikor a valószínűséget nem lehet pontosan tudni[4] (a klasszikus példa a lóverseny). Mi áll ilyenkor a fogadás hátterében? Az egyik lehetőség az, hogy mindkét fél megtippeli az „igazságos fogadás" arányát, és a fogadó igyekszik ezt csökkenteni (a példában 1/3 helyett 1/10-et ajánl), a bukméker pedig növelni (1/3 helyett 1/2-re). Az már a körülményeken múlik, milyen arányban állapodnak végül meg. Egy másik lehetőségre a példa a *Nyolcvan nap alatt a Föld körül*-ből Phileas Fogg egy az egyhez arányú fogadása öt barátjával, amelynek a tétje 20000 font volt. Mindkét fél bízott az esélyeiben, de tudatában volt annak, hogy komoly kockázatot vállal. Fogg valószínűleg úgy gondolta, hogy reálisan fogadhat mondjuk 2:1 vagy 3:1 arányban, a barátai pedig, hogy (Fogg nézőpontjából megfogalmazva) az 1:2, 1:3 arány vállalható. Ebből születhetett a legegyszerűbb 1:1 arányú megállapodás. Itt tehát *két különböző* szubjektív valószínűség kompromisszumáról van szó, nem pedig egyetlen többé-kevésbé ismert arány torzításáról.

Hogyan függ össze az oddsz a valószínűséggel? A kártyás példában az $\mathcal{O}$ esélyhányados az 1:3 arány. Annak valószínűsége, hogy pirosat húzunk, $p = 1/4$-del, annak valószínűsége pedig, hogy más színt húzunk, $q = 1 - p = 3/4$-del egyenlő. Az esélyhányados p/q-val egyenlő: $\mathcal{O} = p/q = p/(1 - p)$. Ebből kifejezhetjük a valószínűséget: $p = \mathcal{O}/(1 + \mathcal{O})$. Ha elfogadjuk, hogy a fogadások valamilyen szubjektív esélyhányados alapján születnek és ez konkrét összegekben realizálódik, akkor ugyanilyen alapon a szubjektív valószínűségnek is tulajdoníthatunk valamilyen értéket, ha nem is pontosat.

Térjünk most vissza a prekogníciós kísérlethez. Az előző fejezetben csak az A és a B hipotézissel foglalkoztunk, de nem zártuk ki annak lehetőségét, hogy más hipotézisek is szóba jöhetnek. Ezt a lehetőséget továbbra is fenntartva *megállapodhatunk* abban, hogy mostantól csak az A és a B hipotézisre koncentrálunk. Ezt a megállapodásunkat a háttér-információ részének fogjuk tekinteni, ezért a háttér-információra I helyett az I_r (redukált) jelet fogjuk használni. A $\mathrm{val}(B|\mathcal{D}, I_r)$ és a $\mathrm{val}(A|\mathcal{D}, I_r)$ valószínűségek összege nyilván 1-gyel egyenlő és ugyanez igaz a $\mathrm{val}(B|I_r)$ és a $\mathrm{val}(A|I_r)$ valószínűségek összegére is. Az *arányaik* azonban nem változhatnak, ezért pl.

$$\mathrm{val}(B|\mathcal{D}, I_r) = \frac{\mathrm{val}(B|\mathcal{D}, I)}{\mathrm{val}(B|\mathcal{D}, I) + \mathrm{val}(A|\mathcal{D}, I)},$$

[4]Lehetséges olyan fogadás is, amikor a valószínűségek pontosan ismertek. A lottozó például úgy köt fogadást a Szerencsejáték RT-vel, hogy pontosan ki tudja számítani az esélyeit és ráadásul azzal is tisztában van, hogy a Szerencsejáték RT folyamatosan nyer az ügyleten.

és hasonló képlet érvényes a másik három valószínűségre is.

A (2) ezután a következő formában is felírható:

$$\mathcal{O}'/\mathcal{O} = R, \tag{7}$$

amelyben $\mathcal{O} = \mathrm{val}(B|I_r)/\,\mathrm{val}(A|I_r)$ a B esélyhányadosa az A-val szemben a kísérlet elvégzése előtt (prior oddsz), $\mathcal{O}' = \mathrm{val}(B|\mathcal{D}, I_r)/\,\mathrm{val}(A|\mathcal{D}, I_r)$ pedig ugyanez a mérési eredmények ismeretében (poszterior oddsz). A (2)-nak ez az alakja plasztikusabban fejezi ki a képlet tartalmát, mint a korábbi, mert már a formájával azt sugallja, hogy az R pontos számértékének nincs jelentősége. Ezért fogalmaztuk már az előző fejezet végén az $R(\lambda)$ görbéből levonható tanulságot a konkrét számértékek felhasználása nélkül, amelyet most így ismételhetünk meg: A vizsgált mérés változatlanul hagyja a B és az A hipotézisek esélyhányadosát.

De hogy lehet ez? Az A hipotézis alapján χ^2-re 100 körüli értéket várunk a ténylegesen mért 137-tel szemben, amit határozottan jelentős különbségnek érzünk. Nem túlzottan kicsi ez az $R \approx 0.5$ ehhez a várakozáshoz képest?

Az $R \approx 0.5$ egyáltalán nem olyan nagyon kicsi. A $\chi^2 = 100$-hoz ugyanis *sokkal kisebb* R tartozik, mint 0.5: a $\lambda = 0$-hoz és a $\lambda = 10$-hez tartozó érték pl. $R(100, 0, 100) = 6.067385 \cdot 10^{-5}$ és $R(100, 10, 100) = 0.03424274$. Ha ilyen R-t kaptunk volna, ebből a B esélyhányadosának lényeges csökkenése következett volna. A mért $R \approx 0.5$ ezeknél legalább egy nagyságrenddel nagyobb. De a Bayes-módszer logikája szerint ez a tetemes növekedés se elég ahhoz, hogy a bizalmunkat határozottan a B felé fordítsa, amikor eredetileg nem tudunk választani a két hipotézis között (vagyis amikor az apriori oddsz kb. 1-gyel egyenlő). Amikor pedig ez az apriori oddsz már önmagában nagyon kicsi, mint a vizsgált esetben, akkor továbbra is ugyanolyan kicsi marad.

A hagyományos kiértékelési eljárás a bayesitől nagyon eltérő elveken alapul. Az alapvető különbség az, hogy csak olyan valószínűségeket fogad el, amelyeknek (legalább elvben) pontos számértékük van. Ebben az eljárásban ezért a hipotézisek valószínűsége nem fordulhat elő. De a kérdés, amire választ kell adnia, változatlanul az, hogy melyik valószínűbb: az A vagy a B hipotézis. A hagyományos statisztikában ezeket nullhipotézisnek és ellenhipotézisnek hívják. Az [1]-ben követett kiértékelésben azonban, amelyet az 1. fejezetben ismertettünk, nem volt ellenhipotézis, ezért csak az lehetett a vizsgálat tárgya, hogy mennyire valószínű a nullhipotézis önmagában (*Fisher-teszt*). Ezzel a típusú kérdésfeltevéssel sajnos mindmáig nagyon gyakran lehet találkozni még a referált tudományos folyóiratokban is, hiába hangsúlyozzák már régóta a statisztikusok, hogy egy hipotézis érvényességét csak egy ellenhipotézishez viszonyítva lehet vizsgálat tárgyává tenni (*Pearson-Neyman-teszt*).

Azonban, mint mondottuk, a hagyományos statisztika valójában sohasem operál maguknak a hipotéziseknek a valószínűségével, ezért a Fisher-teszt sem ezt a valószínűséget vizsgálja. Amikor arra a következtetésre jut, hogy a nullhipotézis mondjuk 1%-os szinten szignifikáns, akkor ennek az az értelme, hogy az ilyen típusú ítéleteknek csak legfeljebb 1 százalékában téved a statisztikus. Vagyis minden száz eset közül, amelyeket 1%-s szinten szignifikánsnak talál, csak egyetlen esetben bizonyul a nullhipotézis mégis érvényesnek (de azt persze nem lehet tudni, melyikben). Az a valószínűség tehát, amelyen a szignifikancia tesztek alapulnak, nem a vizsgált hipotézisre, hanem a pontosan szabályozott statisztikai eljárásra vonatkozik. Ez utóbbiakat ugyanis nagyon sokszor meg lehet ismételni, ezért értelmezhető rájuk valószínűség a relatív gyakoriság alapján.

A hagyományos és a bayesi statisztika között ílymódon alapvető különbség van és egyáltalán nem meglepő, hogy sokszor jutnak ellentétes következtetésre. Ez történt a prekogníciós kísérlet esetében is. Sőt, egészen általános formában megmutatható, hogy amikor a minta mérete nő, és a Fisher-teszt folyamatosan szignifikáns ugyanazon p-érték mellett, akkor biztosan ellentétbe kerülnek egymással (*Jeffreys-Lindley paradoxon*).

A prekogníciós kísérletben ez a következőt jelenti. Tegyük fel, hogy a kísérletet újra meg újra megismételjük, ezért a minta N mérete egyre nagyobbá válik. Tegyük fel azt is, hogy a Fisher-tesztet is mindig elvégezzük, amikor a minta észrevehető mértékben megnő, és mindig azt találjuk, hogy ugyazon $p = 0.01$ érték mellett szignifikáns. A teszt hagyományos értelmezése szerint ez újra és újra megerősít abban, hogy a nullhipotézist el kell vetni. A Függelékben azonban megmutatjuk, hogy ugyanekkor az R *nullához tart*. De ha a Bayes-arány nulla, akkor a B hipotézis esélye az A-val szemben nulla, tehát az A nullhipotézis korrekt. Az ellentmondás nyilvánvaló.

De melyik következtetés a hihetőbb? A bayesi felfogás mellett elsősorban az szól, hogy azon a valószínűségen alapul, amely a vizsgálat tárgyát képezi. Egy további érv mellette, hogy a hagyományos statisztikában elismerik: A p-értéket a minta növelésével csökkenteni kell. Ez a bayesi érvelés helyességének hallgatólagos beismerése, amely kikezdi a hagyományos hipotézis tesztek talán legfontosabb motivációját, a szubjektív elem kiküszöbölését.

A szubjektív elem kiküszöbölésének az igénye vezetett oda, hogy — legalább is a nemstatisztikus kutatók kezében — a statisztikai tesztek teljesen mechanikussá, technikai jellegűvé váltak (misztifikálódtak, ahogy a [2] 162. oldalán olvashatjuk). A bayesi megközelítésnek nem lebecsülendő előnye, hogy ezt a tendenciát nem támogatja, mert minden konkrét eset külön elemzést igényel (hasonlítsuk csak össze ebből a szempontból az 1. és a 2. fejezetet). Az is fontos körülmény, hogy a Bayes-arányra csak akkor kaphatunk számértéket, ha a hipotézisek állításait matematikai formába tudjuk önteni. Ezért sokkal nehezebb összemosni a kísérletben vizsgált hipotézist azzal az elmélettel, amely a hipotézis alapjául szolgál. A 2. fejezetben az A hipotézisen a (4) normáleloszlást, a B hipotézisen pedig a (6) függvénnyel súlyozott normál eloszlást értettük, nem pedig azt, hogy „nincs prekogníció" és „van prekogníció". A kísérletre csak abban az esetben tekinthetnénk úgy, hogy *ez utóbbi* alternatívára vonatkozik, ha létezne egy legalább kiindulópontnak tekinthető elméleti elképzelés arról, hogy hogyan okozhatja a prekogníció a $p = 1/2$-hez tartozó binomiális eloszlás kiszélesedését a p értékének megváltozása nélkül. A statisztika *önmagában* nem képes létrehívni ilyen elméletet, csak már többé-kevésbé határozottan körvonalazott elméletek tartalmi elemzéséhez szolgáltathat támpontokat.

Függelék

Az $R(\chi^2, N, \lambda)$ képletének levezetésére helyettesítsük (5)-be a (6) függvényt:

$$\mathrm{val}(\mathcal{D}|B, I) = \int_{\sigma_0}^{\infty} d\sigma \, \frac{1}{\sigma^N (2\pi)^{N/2}} \, e^{-\frac{\sum(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(\lambda+1)\sigma_0^{\lambda+1}}{\sigma^{\lambda+2}}. \tag{8}$$

A $\sum(x_k - \mu)^2$ összeget az (1) alapján helyettesítsük $\chi^2\sigma_0^2$-tel, majd pedig térjünk át a σ integrációs változóról a t változóra a $\sigma = \sigma_0\chi/\sqrt{t}$ képlet szerint:

$$\mathrm{val}(\mathcal{D}|B, I) = \frac{(\lambda+1)}{\sigma_0^N (2\pi)^{N/2} \chi^{N+\lambda+1}} \int_0^{\chi^2} dt \cdot t^{\frac{N+\lambda-1}{2}} e^{t/2}. \tag{9}$$

Az integrandus normálás erejéig a χ^2-eloszlás

$$f(t, \nu) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t/2} dt \tag{10}$$

sűrűségfüggvénye $\nu = (N + \lambda + 1)$-nél, az integrál maga pedig az eloszlásfüggvény, amelyet $F(\chi^2, \nu)$-vel fogunk jelölni.

Fejezzük ki most a (9)-ben a t-integrált az $F(\chi^2, N+\lambda+1)$ függvényen keresztül. A gamma-függvényre pedig használhatjuk az aszimptotikus alakját, amely ([6], (6.1.39))

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} e^{-z} z^{z-1/2}.$$

Végül az így átalakított val$(\mathcal{D}|B, I)$-t, valamint a val$(\mathcal{D}|A, I)$ (4) képletét helyettesítsük be (3)-ba. Ezt kapjuk:

$$R(\chi^2, N, \lambda) \sim 2\sqrt{2\pi} \frac{\lambda+1}{N+\lambda+1} e^{\frac{1}{2}[\chi^2-(N+\lambda+1)]} \left(\frac{N+\lambda+1}{\chi^2}\right)^{\frac{N+\lambda+1}{2}} F(\chi^2, N+\lambda+1). \tag{11}$$

Ezt a képletet használtuk az R-függvény számítására.

A Jeffreys-Lindley paradoxon igazolásához [6] (26.4.16) képletét használhatjuk, amely nagy szabadsági foknál lehetővé teszi az adott p-értékhez tartozó χ_p^2 kiszámítását:

$$\chi_p^2 \sim \frac{1}{2}(x_p + \sqrt{2\nu - 1})^2 \qquad (\nu > 100)$$

(az x_p a nulla átlagú, egységnyi szórású normál eloszlás adott p-értékhez tartozó kritikus argumentuma). Helyettesítsük ezt $\nu = (N + \lambda + 1)$-nél (11)-be, vegyük figyelembe, hogy $F(\chi_p^2, N + \lambda + 1) = 1 - p$, és tartsunk N-nel végtelenhez. Az N-ben vezető tagokat megtartva azt találjuk, hogy R $1/e^{N/2}$-ként tart a nullához.

Irodalom

[1] Z. Vassy, *Experimental Study of Precognitive Timing —Indication of a Radically Noncausal Operation)*, Journal of Paraphysiology, Vol. 54, 299 (1990).

[2] Reiczigel Jenő, Harnos Andrea, Solymosi Norbert *Biostatisztika* (Pars, 2007)

[3] D. S. Sivia (with J. Skilling) *Data Analysis* (Oxford University Press, 2006)

[4] C. Howson and P. Urban: *Scientific Reasoning: The Bayesian Approach*, 3. edition, Open Court, 2006

[5] Pólya György *A plauzibilis következtetés elmélete. A matematikai gondolkodás művészete II.* Gondolat 1989, XV. fejezet.

[6] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions