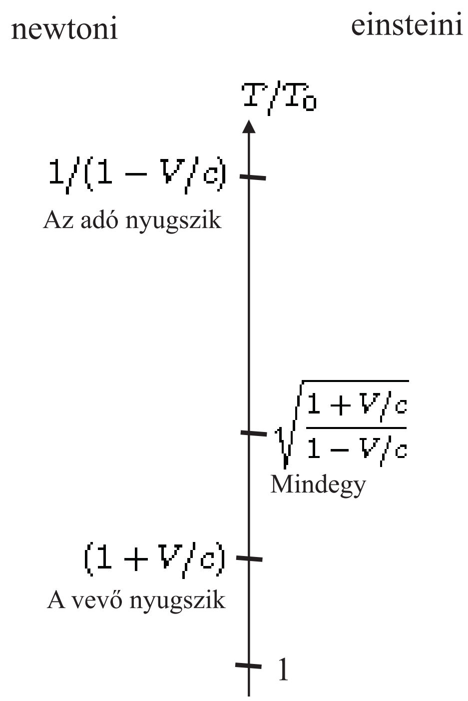


1. ábra.

A relativitáselmélet alapjai

TARTALOM

KIEGÉSZÍTÉSEK ÉS MEGJEGYZÉSEK

Az idődilatációhoz.

A $\gamma(V)$ interpretálását idődilatációként az 1.2 szakasz utolsó bekezdése tartalmazza. Ez túl tömörnek tűnik, ezért részletezzük.

A T/T_0-ra a newtoni fizika alapján két különböző értéket kaptunk attól függően, hogy a vevő vagy az adó nyugszik. Az 1.ábrán ezeket a T/T_0 tengely baloldalán tüntettük fel. A $\gamma(V)$ bevezetésével a kettőt egyetlen közös értékre redukáltuk, amely a tengely jobboldalán szerepel. A felrajzolásnál kihasználtuk, hogy

$$\frac{1}{1-V/c} > \sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}} > (1+V/c) > 1,$$

amit $\gamma^2(V)\cdot(1+V/c) > \gamma(V)\cdot(1+V/c) > (1+V/c) > 1$ alakban is írhatunk.

Tegyük fel, hogy Adó és Vevő — két kísérletező fizikus — csak a newtoni fizikát ismeri és ellenőrizni akarja a Doppler-effektus képleteit. Hallgassuk meg, hogyan tárgyalnak egymással mobiltelefonon:

V: Te Adó! Abban állapodtunk meg, hogy pontosan $T_0 = 1$ másodpercenként indítod a jeleket. A sebességed ismeretében a $T = T_0(1+V/c)$ képlet szerint akkor nekem 1.2 másodpercenként kellene észlelnem őket. De ritkábban jönnek, 1.3 másodpercenként.

A: Pedig én mindig pontosan akkor indítok el egy jelet, amikor az előttem álló óra másodpercmutatója egyet ugrik.

V: Biztos, hogy pontos az órád?

A: Egészen biztos. Vannak itt nálam kvarcórák, sőt atomórák is, mind szinkronban járnak az előttem álló órával. Sőt, az én pulzusom olyan, hogy mindig 60-t ver percenként. Ezzel is szinkronban vagyok.

V: Hűha! Akkor nálad az idő lassabban telik, mint nálam. Biztosan azért, mert mozogsz. De persze ezt Te magad nem veszed észre.

A: Nem én mozgok, hanem Te! Várj csak, én is kiszámítom a $T = T_0/(1-V/c)$ képlet alapján, hogy milyen időközönként kell észlelned a jeleimet. Nekem 1.5 másodperc jön ki. De akkor a Te órád is lassabban jár a kelleténél, hiszen állításod szerint két egymás utáni jel között nálad csak 1.3 másodperc telik el. Jól méred az időt?

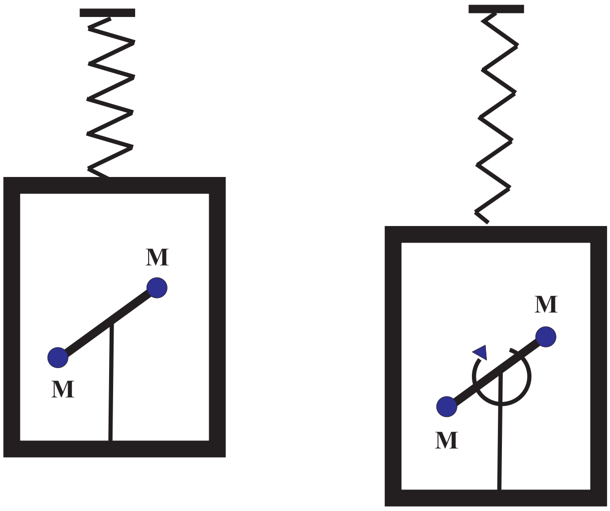
V: Hát persze, én is felszerelkeztem mindenféle időmérő alkalmatossággal.

A: Akkor hát az idő nálad is lassabban telik, mint nálam. Biztosan azért, mert mozogsz.

V: Várj csak. Nálam is van egy adó, meg nálad is egy vevő. Helyezzük csak üzembe őket!... Most elkezdek jeleket küldeni feléd pontosan 1 másodpercenként. Milyen időközönként észleled őket?

A: Nahát! Nálam is 1.3 másodperc telik a Te jeleid között, ugyanúgy, mint nálad az én jeleim között. Akkor hát hibásan tanították nekünk, hogy a Doppler-effektus szempontjából nem mindegy, hogy az adó vagy a vevő mozog, hiszen azt tapasztaljuk, hogy ez teljesen közömbös, és csak a relatív mozgás számít!

Ez a naív kis beszélgetés történetileg persze egyáltalán nem realisztikus. Einstein előtt úgy gondolták, hogy a fény a nyugvó éterhez képest terjed minden irányban azonos sebességgel, és a Doppler-effektusra vonatkozó két képlet azért különbözik egymástól, mert az első esetben a vevő, a másodikban az adó nyugszik *az éterhez képest.* Ugyanezek a képletek érvényesek az akusztikában, ha az étert a hangterjedés közegével, a c-t pedig a hangsebességgel helyettesítjük. Az optikában a két képlet csak akkor mond ellent egymásnak, amikor abból a feltevésből *indulunk ki*, hogy az inerciarendszerek egyenértékűek, és



2. ábra.

ezért a fény mindegyikben ugyanazzal a c sebességgel terjed minden irányban. Einstein ebből indult ki, és erre a helyzetre vonatkozik a fenti párbeszéd.

A relativisztikus tömegnövekedéshez.

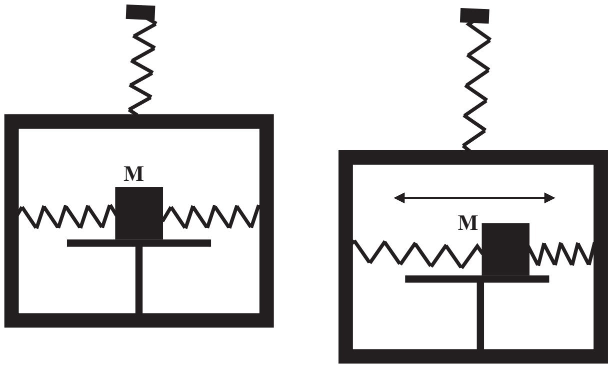
Vető Balázs kolléga (ELTE) felhívta a figyelmemet a Berkeley Physics Course második kötetére (*Electricity and Magnetism*), amelyben a szerző *E. M. Purcell* a következő gondolatkísérlettel véli igazolni, hogy a tömegnövekedés valóságos jelenség.

Egy dobozban rögzített tengely körül tud forogni egy súlyzó, amelynek végén a két golyó tömege M-mel egyenlő, az őket összekötő rúd tömege pedig elhanyagolható. A baloldali ábrán a súlyzó nyugalomban van, a jobboldalin egyenletesen forog, ezért ezen az ábrán a golyók tömege valójában az $M/\sqrt{1-V^2/c^2}$ mozgási tömeggel egyenlő, tehát nagyobb, mint M. Ennek következtében a forgó súlyzót tartalmazó doboz súlyosabb, ezt mutatja a felfüggesztő rugó nagyobb megnyúlása. A súlykülönbséget okozó tömegkülönbség

$$2\left(\frac{M}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - M\right) \tag{$*$}$$

-mel egyenlő, ahol V a súlyzó végén lévő tömegek sebessége. Purcell szerint ez a gondolatkísérlet igazolja, hogy a mozgás következtében fellépő tömegnövekedés valóságos jelenség, mert mérhető következménye van.

A relativitáselmélet szerint a $(*)$ tömegkülönbségnek megfelelő súlykülönbség valóban fellép a két doboz között. A korrekt értelmezés azonban az, hogy (1.9.3)



3. ábra.

figyelembevételével a $(*)$ kifejezés $2K/c^2$-tel egyenlő, amelyben $2K$ a golyók mozgási energiája. Ezzel a mozgási energiával nő meg a *doboz belső energiája*, amikor a súlyzót forgásba hozzuk, ezért lesz a *doboz* tömegváltozása $2K/c^2$. Ezt a tömegváltozást jelzi a *doboz* súlynövekedése, amely a rugó megnyúlását okozza.

A súlynövekedést mindkét interpretáció szerint a $(*)$ tömegnövekedés okozza és ebből az a benyomás alakulhat ki, hogy csupán beszédmód kérdése, hogy a súlynövekedést a *két mozgó golyó*, vagy a *nyugvó doboz* tömegnövekedéseként értelmezzük. A gondolatkísérlet alábbi változata azonban egyértelműen bizonyítja, hogy csak a második értelmezés fogadható el.

Vegyük figyelembe, hogy a súrlódás következtében a súlyzó forgása lassul és egy idő után meg is szűnik, és tegyük fel, hogy a doboz falai hőszigetelők. A doboz belső energiája ekkor a forgás fokozatos megszűnése ellenére változatlanul $2K$-val marad egyenlő, csak a formája változik: A súlyzó rendezett mozgási energiájából a hőmozgás energiájába megy át. A doboz súlya se változik, mert a tömege továbbra is $2K/c^2$-tel lesz egyenlő. Ha azonban a súlynövekedést a golyók mozgási tömege okozná, a súlytöbbletnek meg kellene szűnnie.

Erre lehetne azt válaszolni, hogy a hőmozgás növekedése következtében a molekulák sebessége megnő, és a molekulák mozgási tömegének a megnövekedése fenntartja a súlytöbbletet. Ebből az érvelésből azonban legfeljebb annyi következik, hogy a molekulák mozgási tömege okoz *valamilyen* súlytöbbletet, de az nem, hogy ez a súlytöbblet *egyenlő* azzal, amit a súlyzó forgása okoz (ld. a 12. lábjegyzetet a könyv 51. oldalán). Könnyű továbbá úgy módosítani a gondolatkísérletet, hogy a hőmozgásnak egyáltalán ne legyen szerepe.

A dobozban egy M tömegű kocka vízszintes rezgéseket tud végezni egy (súrlódásmentes) asztalon. A baloldali ábrán a kocka nyugszik, mert a két rugó megnyúlása egyforma. A jobboldali ábrán rezeg — mondjuk — ν frekvenciával. A mozgó kockát tartalmazó doboz súlya nagyobb, a tömegkülönbséget az

$$\frac{M}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - M \qquad (**)$$

képlet adja meg, amelyben V a kocka sebessége a szimmetriapontban (vagyis a maximális sebesség). Egy perióduson belül a kocka kétszer veszi fel ezt a sebességet, kétszer pedig nyugalomba kerül. Ezért ha a súlynövekedés a kocka sebességéből adódó tömegváltozás következménye lenne, akkor a doboznak 2ν frekvenciával kellene le-föl ingadoznia. A relativitáselmélet szerint azonban ilyen ingadozás nem lép fel. A doboz tömegének a megváltozását ugyanis az oszcillátor *teljes energiájának* a megváltozása okozza, amely időben állandó, mert beleszámít a rugókban felhalmozott rugalmas energia is[1]. A $(**)$ nem más, mint ez a konstans energia-megváltozás, osztva a fénysebesség négyzetével.

Hogyan került be a fizikába az az elképzelés, hogy a tömeg esetleg függhet a sebességtől? Az 1880-as évek elején J. J. Thomson kezdte el alkalmazni a Maxwell-egyenleteket az anyag tulajdonságainak a vizsgálatára. A kutatásnak, amelybe sokan bekapcsolódtak, az egyik fontos következtetése az volt, hogy egy mozgó töltés elektromágneses terében annál nagyobb térimpulzus (és térenergia) van felhalmozva, minél gyorsabban mozog a test, és ez arra vezet, hogy egy töltött testet annál nehezebb gyorsítani, minél nagyobb a sebessége. Hamar szokásossá vált ezt az eredményt úgy fogalmazni, hogy a töltött testek tömege nő a sebességgel (noha valójában nem a tömeg, hanem a térenergia nőtt meg). A XIX. század utolsó éveiben J. Larmor és W. Wien mondta ki azt a hipotézist, hogy mivel az anyag elektromosan töltött alkotórészekből áll, a tömeg (az elektromosan semleges testek tömege is!) esetleg tisztán az elektromágneses térenergia hatásának a megnyilvánulása (*a tömeg elektromágneses elmélete*).

W. Kaufmann kísérleteit ezek az elképzelések inspirálták. A kísérletek igazolták, hogy az elektronokat annál nehezebb gyorsítani, minél nagyobb a sebességük, és a már megszokott (hibás) szóhasználattal ezt tömegnövekedésként fogták fel. A tömeg elektromágneses elméletéről azonban hamar kiderült, hogy nem tartható, mert az elektromágneses kölcsönhatás önmagában nem tud stabil anyagot létrehozni, a relativitáselmélet viszont természetes magyarázatot kínál Kaufmann eredményeire. Ez a magyarázat nem a tömegnövekedésen, hanem az idődilatáción alapul. Ennek ellenére ma is sokan gondolják úgy, hogy a relativitáselmélet tömegnövekedésre vezeti vissza azt, hogy a gyorsan mozgó elektronokat nehezebb tovább gyorsítani, mint a lassan mozgókat.

A helyzetet még bonyolítja, hogy az $E_0 = mc^2$ képletet, amely kizárólag a nyugalmi energiára vonatkozik, teljesen alaptalanul alkalmazni kezdték az $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ teljes energiára is és ebből is azt a (téves) következtetést vonták le, hogy a mozgás növeli a testek tömegét. Ez azzal az eredménnyel járt, hogy az $E_0 = mc^2$ képlet eredeti levezetési módja, amelyet az 1.10 szakaszban ismertettünk, kihullott a fizikus köztudatból (de talán nem is volt ott soha), és az a benyomás keletkezett, hogy ez az összefüggés ugyanazt fejezi ki, mint a relativisztikus mozgásegyenlet: Minél gyorsabban mozog egy test, annál nehe-

[1] A felfüggesztő rugók energiájához társuló tömeg megzavarja a dobozok belső energájának különbségéből származó tömegkülönbség pontos meghatározását. Ha azonban a baloldali dobozra addig helyezünk súlyokat, amíg a baloldali rugó megnyúlása meg nem egyezik a jobboldaliéval, a kiegyenlítéshez szükséges súly pontosan megegyezik a dobozok súlykülönbségével.

zebb tovább gyorsítani. Ez a körülmény nehezítette a képlet valódi jelentésének a felismerését, mert úgy látszott, hogy csupán átfogalmazása annak, amit a tömegnövekedésről már Einstein előtt is gondoltak. Erről a félreértésről árulkodik az a furcsaság, hogy annak, aki a forgó golyókat tartalmazó doboz példáját kitalálta a mozgási tömeg realitásának a demonstrálására, nem jutott azonnal eszébe az ellenpélda is, az oszcilláló tömeget tartalmazó doboz.

Pedig az $E_0 = mc^2$ képletnek valójában *semmiféle előzménye* sem volt. Soha senkise gondolt arra, hogy ha egy dobozban egy rugót megfeszítünk, ezzel növeljük a doboz tömegét. És a relativitáselmélet megjelenését megelőző évtizedben az sem jutott eszébe senkinek, hogy a radioaktív hő energiáját a tömeg csökkenése fedezi. Ez utóbbi következtetés első ízben a "Függ-e a testek tehetetlensége az energiatartalmuktól" című Einstein-cikk végén jelent meg 1905 szeptemberében.

A tömegmegmaradásról.

Az $E_0 = mc^2$ képlet a testek *belső energiáját* kapcsolja össze a tömegükkel. Mivel a belső energia külön nem marad meg, ezért a tömeg sem megmaradó mennyiség. A belső energia továbbá azonos a nyugvó test energiájával, ezért invariáns mennyiség (nem egy négyesvektor null-komponense). Ennek következtében a tömeg is invariáns.

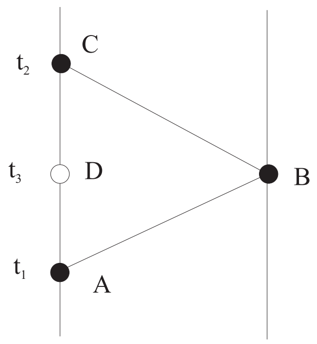
A 2.19 szakaszban vizsgáltuk a $Po^{210} \longrightarrow Pb^{206} + \alpha$ bomlást, amelyben a Po^{210}, a Pb^{206} és az alfa-részecske tömege M, m és μ. A tömeg nem marad meg, mert $M > m + \mu$. Az energia azonban megmarad:

$$Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (*)$$

ahol V az ólom-mag, v pedig az alfa-részecske sebessége. Ha c^2-tel egyszerűsítünk és használjuk a mozgási tömeg fogalmát, ezt az egyenlőséget értelmezhetjük tömegmegmaradásként: a Po^{210} tömege egyenlő a Pb^{206} és az alfa-részecske mozgási tömegének összegével. Azonban semmilyen előnnyel sem jár, ha az energiamegmaradás tételét ezen a módon mesterkélten tömegmegmaradás alakjában fogalmazzuk meg.

A newtoni fizikában a tömeget megmaradó mennyiségnek tekintjük. Ez addig jó közelítés, ameddig a testek belső energiájának a *változásai* elhanyagolhatóan kicsik a belső energiájukhoz viszonyítva.

A *tömeg* és az *anyag* két lényegesen különböző fogalom. A tömeg jól meghatározott jelentéssel bíró *terminus technicus.* Azt a paramétert jelöli, amely a Newton-egyenletekben a gyorsulást szorozza és a számértékét ezekből az egyenletekből kiindulva (vagy súlyméréssel) lehet meghatározni. Azonban a Newton-egyenletek nem vonatkoznak minden fizikai objektumra: Az elektromágneses mezőt például nem ők, hanem a Maxwell-egyenletek írják le, amelyekben nincs se gyorsulás, se tömeg. Ezek a tömeg nélküli objektumok azonban éppúgy *léteznek*, mint a tömegesek, ezért az „anyag" terminus — amely inkább filozófiai,



4. ábra.

mint fizikai fogalom, mert nem létezik mérési eljárás, amellyel a mennyisége számszerűsíthető — rájuk is vonatkozik.

A fénysebesség méréséről egy irányban.

E. Szabó László „A nyitott jövő problémája" c. könyvében (Typotex 2002) a 44-45. oldalon azt állítja, hogy „logikai lehetetlenség" a fény sebességét egy irányban megmérni a távoli órák előzetes szinkronizálása nélkül:

„Idézzük fel az egyidejűség standard definícióját. Jelölje A azt az eseményt, amikor az O_1 megfigyelő egy fényjelet indít el az O_2 megfigyelő felé. Legyen B az az esemény, amikor a fényjel megérkezik O_2-höz, és O_2 azonnal egy másik jelet indít visszafele O_1-hez, akihez ez a C téridőpontban érkezik meg (ld. az ábrát). A kérdés az, hogy az O_1 megfigyelő világvonalán melyik az az esemény, amelyik egyidejű B-vel. Eléggé kézenfekvő, hogy ez az esemény valahol az A és a C között van a $t_3 = t_1 + \varepsilon(t_2 - t_1)$ időpontban, ahol $\varepsilon \in (0, 1)$. Azt gondolhatnánk, hogy ε értékét a fény oda- és visszafelé történő terjedésének sebessége meghatározza. Kiderül azonban, hogy ez nincs így. A

$$\frac{\overrightarrow{c}}{\overleftarrow{c}} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

hányadosból ε nem határozható meg, mert ennek a hányadosnak az értéke nem kevésbé konvencionális, mint magának az ε-nak az értéke. Nem lehetséges ugyanis a fény terjedésének egyirányú sebességét megmérni az egyidejűség előzetes fogalma nélkül. Ez egy egyszerű logikai tény, ha direkt módon a fény egyirányú terjedési sebességét akarnánk megmérni, hiszen ehhez a fényjel elindulásának és megérkezésének idejét kell összevetnünk. Számos olyan javaslat is volt az irodalomban, amely különböző indirekt módszerekre vonatkozott. E javaslatok részletes analízise kimutatta, hogy nincs olyan trükkös mérési eljárás, amellyel lehetséges lenne a fény egyirányú terjedési sebességét meghatározni anélkül, hogy az eljárás maga ne tételezné fel az egyidejűség előzetes definícióját."

A 2.2 szakasz mutatja, hogy E. Szabó gondolatmenete nélkülöz minden alapot, mert az egyirányú fénysebességet nagyon egyszerűen meg lehet mérni, nem kell hozzá „trükkös mérési eljárás”

A longitudinális és a tranzverzális tömegről.

A tömegpont mozgásegyenleteit nem-specializált erőtérben a (2.18.3) képlet adja meg. Ezek az egyenletek egy vektoregyenlet három komponense, amelyek közül az első a mozgás pillanatnyi irányába, a második és a harmadik az erre merőleges irányba mutató komponens. Ez a geometriai jelentés sugallja, hogy az első egyenletben a gyorsulást szorzó tömegdimenziójú $m/(1-v^2/c^2)^{3/2}$ mennyiséget *longitudinális tömegnek*, a másik kettőben pedig az $m/(1-v^2/c^2)$ mennyiséget *tranzverzális tömegnek* nevezzük el. Ezt a konvenciót használja *Einstein* az 1905-ös dolgozatában.

A gyakorlatban azonban ezeket a mozgásegyenleteket szinte kizárólag elektromágneses térben mozgó ponttöltésekre alkalmazzák . Az egyenletek erre specializált alakját a (2.21.3) képletben írtuk fel. Mint látható, ebben a speciális esetben a második és a harmadik egyenletet célszerű $\sqrt{1-v^2/c^2}$-vel végigszorozni. Ekkor az $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ mennyiség jelenik meg a gyorsulás szorzótényezőjeként, ezért a leggyakrabban ezt hívják tranzverzális tömegnek.

A téridő-diagramok egy matematikai tulajdonsága.

A 10.ábrán hallgatólagosan felhasználtuk a téridő-diagramok következő tulajdonságát: A ct'-tengely és a $c^2t^2-x^2 = konstans$ hiperbola P metszéspontjában a hiperbola **ee** érintője párhuzamos az x' tengellyel, valamint az x'-tengely és az $x^2-c^2t^2 = konstans$ hiperbola Q az 5.ábrát).

Amikor a vesszős rendszer (határesetben) egybeesik a vesszőtlennel, a tétel nyilvánvaló. A téridő-diagramot azonban úgy is felrajzolhatjuk, hogy nem az $\mathcal{I}$, hanem az $\mathcal{I}$ ' tengelyei merőlegesek egymásra, és ebből már sejthető, hogy a tétel valóban igaz. De formálisan sem nehéz belátni.

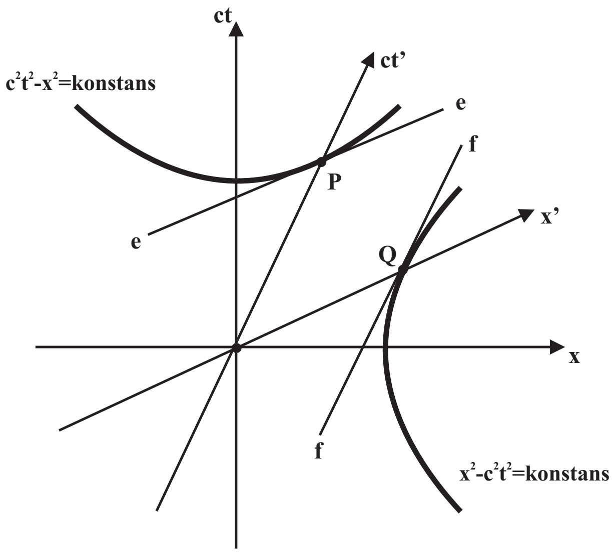
A $c^2t^2-x^2 = konstans$ egyenlet differenciálja nyilván $2ct \cdot d(ct) = 2x \cdot dx$, ezért a hiperbola iránytangese

$$\frac{d(ct)}{dx} = \frac{x}{ct}. \tag{$*$}$$

De a P pont a ct' tengelyen (vagyis az $x' = 0$ tengelyen) van, amelynek egyenlete a vesszőtlen tengelyekhez viszonyítva $x - Vt = 0$.

$$\left.\frac{d(ct)}{dx}\right|_P = \frac{V}{c}. \tag{B}$$

Másrészt az x' tengely egyenlete a vesszőtlen tengelyekhez viszonyítva $t-\dfrac{V}{c^2}x =$



5. ábra.

0, ezért ennek a tengelynek a ct/x iránytangese ugyancsak V/c-vel egyenlő, ahonnan következik a tétel első fele. A második igazolása ugyanígy történik.

A mozgásegyenlet származtatásához.

A tömegpont mozgásegyenletének a levezetése az 1.7 fejezetben olvasható. Gróf Andrea tanárnő hívta fel a figyelmemet arra, hogy a levezetésben a dv/dv_0 arány számításánál a dl mennyiség részletesebb magyarázatot igényel.

Amikor a gyorsulás nulla, az $\mathcal{I}_0$-ban a dt_0 idő alatt az elmozdulás nulla: $dl_0 = 0$. Az $\mathcal{I}$-ben azonban az ennek megfelelő dt idő alatt az elmozdulás $v \cdot dt$-vel egyenlő. Zérustól különböző gyorsulásnál dl_0 valamilyen véges érték, az $\mathcal{I}$-ben megtett út pedig a dl_0-nak megfelelő dl értékkel *nagyobb*, mint $v \cdot dt$. A dl tehát *nem* az $\mathcal{I}$-ben dt idő alatt megtett teljes távolság, hanem annak csak a gyorsulással kapcsolatos része. Mivel dv_0 és dv is csak akkor különbözik nullától, amikor van gyorsulás, ezért

$$dv_0 = k_0 \frac{dl_0}{dt_0} \qquad \text{és} \qquad dv = k\frac{dl}{dt}.$$

Azonban elég egyszerűen látható, hogy $k = 2$. A dt infinitezimális időintervallumban az a gyorsulás konstansnak tekinthető, ezért

$$dl = \left(\frac{a}{2}dt^2 + v \cdot dt\right) - v \cdot dt = \frac{a}{2}dt^2 = \frac{1}{2}dv \cdot dt,$$

ahonnan valóban $k = 2$ következik. Ugyanez a gondolatmenet $v = 0$-val is megy, ezért k_0 is 2-vel egyenlő. Így végül

$$dv : dv_0 = \frac{dl}{dt} : \frac{dl_0}{dt_0}.$$

Az ikerparadoxon az utazó testvér nézőpontjából.

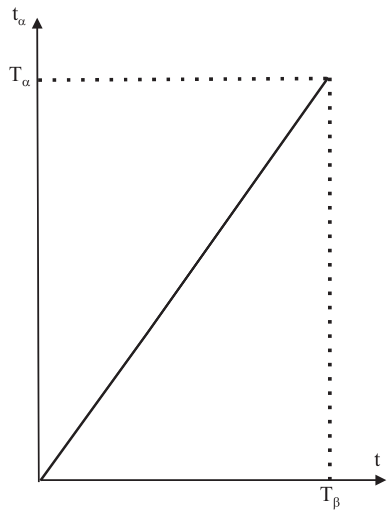
A 2.12 fejezetben az ikerparadoxont az Alszeg és Felszeg között ingázó vonat példáján illusztráltuk. A tárgyalás megkönnyítése érdekében adjunk nevet az ikreknek: Legyen Alfa az, aki végig Alszegen tartózkodik az Alszeg-Felszeg tartományhoz rögzített inerciarendszerben, Béta pedig az, aki Alszegről Felszegre utazik és vissza. A két találkozásuk között Alfa óráján T_α, Béta óráján T_β idő telt el. Az ikerparadoxon abban áll, hogy $T_\beta < T_\alpha$. Mivel Alfa nyugalmi rendszere inerciarendszer, Minkowski koordinátákat rögzíthetünk hozzá, feltehetjük, hogy a vasút a Minkowski-koordinátaidő szerint üzemel, és a vasútállomások órái mindenütt ezt az időt mutatják. Ekkor a menetrend ismeretében a (2.11.1) képlet segítségével a két időtartamot könnyen ki lehet számítani.

A 2.12 fejezetben azonban elsősorban azt vizsgáltuk, milyen „ütemben" alakul ki Béta órájának a késése. Alfa inerciarendszerében történő leírásnál Béta minden közbenső állomáson összehasonlítja a saját óráját a vasútállomáséval és megállapítja, hogy egyre jobban késik. Mire visszaér Alszegre, a késés $(T_\beta - T_\alpha)$-val egyenlő. Ez a késés tehát *egyenletesen* jön létre.

Ha a vonatot tekintjük nyugvónak, akkor nem ennyire egyszerű a helyzet. Mint a 2.12 fejezetben láttuk, ekkor hosszabb vonatot kell elképzelnünk, mint az Alszeg és Felszeg közötti távolság, amelyen egymástól bizonyos távolságra órák vannak elhelyezve. Ezek felelnek meg a vasútállomások óráinak az előző leírásban. A probléma az, hogy hogyan szinkronizáljuk ezeket az órákat. Erre most nincs univerzális (kitüntetett) recept, mert a vonat nem inerciarendszer.

Két természetes lehetőséget fogunk megvizsgálni. Az elsőben a vonat óráit még az Alszegről törénő elindulása előtt az állomáson az Alszeg-Felszeg tartomány koordinátaidejének megfelelően állítjuk be. Mivel a vonatot tekintjük nyugvónak, induláskor ez a tartomány indul el a vonathoz képest visszafele és Alfa hasonlítja össze a saját órájának az állását (t_α-t) az egymás után következő vonati órák mutatóállásával (t-vel). Nyilvánvaló, hogy az ő órájának a sietése pontosan ugyanolyan fokozatossággal fog kialakulni, mint az előző esetben Béta órájának a késése. Erről nagyon könnyen meggyőzhetjük magunkat, ha az érvelést Alfa inerciarendszerére alapozzuk. Ekkor ugyanis az egymás után Alfa órája mellett elhaladó vonati órák egyre hosszabb utat tudnak maguk mögött és ezért egyre jobban késnek Alfa órájához képest — ami természetesen megfogalmazható úgy is, hogy Alfa órája folyamatosan egyre jobban siet hozzájuk képest. Amikor a vonat végig egyenletes sebességgel halad és Felszegre érve azonnal elindul visszafele, a $t_\alpha(t)$ függvényt a 6. ábrán rajzoltuk fel (a 8. ábrával kell majd összevetni).

Tanulságos lesz a vonati óráknak ezt a szinkronizálási módját összehasonlítani egy másikkal. Mielőtt azonban ezt megtesszük, célszerű lesz egy látszólag



6. ábra.

mesterkélt segédfeladattal foglalkozni. Tekintsünk egy $\mathcal{I}$ inerciarendszert és rögzítsünk hozzá ct, x Minkowski-koordinátákat. Mivel a koordinátarendszer választása önkényes, a $t > 0$ tartományban vezessünk be ehelyett új vesszős koordinátákat a következő lépésekben:

1. Választunk egy önkényes U sebességet ($U < c$), elképzeljük a $t > 0$ félsíkon az összes $x = Ut + konstans$ pályát a konstans minden lehetséges értékénél és az $x = konstans$ koordinátavonalak helyett ezeket tekintjük x' koordinátavonalaknak (és ezeket ábrázoljuk függőleges egyenesekkel).

2. Egy ct, x koordinátájú P pont új x' koordinátája azzal az x koordinátával lesz egyenlő, amelynél a P-n áthaladó új koordinátavonal metszi az x-tengelyt. Képletben:
$$x' = x - Ut.$$

3. A P új t' időkoordinátája azzal a $t\sqrt{1 - U^2/c^2}$ sajátidővel egyenlő, amenynyi az új koordinátavonalon a $(0,\ t)$ intervallumban (vagyis a P pontig) eltelik: $t' = t\sqrt{1 - U^2/c^2}$.

Ezeknek az összefüggéseknek az alapján a $t > 0$ tartományban a régi és az új koordináták kapcsolata a következő:

$$\begin{aligned} t' &= t\sqrt{1 - U^2/c^2}t \qquad & t &= \frac{1}{\sqrt{1 - U^2/c^2}}\,t' \\ x' &= x - Ut & x &= x' + \frac{U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}}\,t' \end{aligned} \tag{$*$}$$

A 2.10 fejezetből tudjuk, hogy az eredeti vesszőtlen változókban a $ds^2 = c^2 d\tau^2$ infinitezimális négyestávolság négyzetet (ívelemnégyzetet) a $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$ képlet fejezi ki a koordinátákon keresztül. Most ez csak $t < 0$ lesz érvényes. A $t > 0$ tartományban ebben a képletben $(*)$ segítségével a vesszőtlen változókat vesszősökkel kell kifejezni. Rövid számolás után ezt a képletet kapjuk:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt'^2 - 2\frac{U/c}{\sqrt{1 - U^2/c^2}}\, cdt' \cdot dx' - dx'^2.$$

Utolsó lépésként hagyjuk el a vesszőt és foglaljuk össze az új t, x koordinátarendszerünket jellemező ds^2-t:

$$ds^2 = \begin{cases} c^2 dt^2 - dx^2 & \text{ha } t < 0 \\ c^2 dt^2 - 2\dfrac{U/c}{\sqrt{1 - U^2/c^2}}\, cdt \cdot dx - dx^2 & \text{ha } t > 0. \end{cases} \qquad (\dagger)$$

Ilyen tulajdonságú koordinátarendszert, mint látjuk, lehet választani $\mathcal{I}$-ben, de ez a választás egyáltalán nem célszerű: A $t > 0$ tartományban ugyanis az $\mathcal{I}$ vonatkoztatási rendszerünk helyzetét nem konstans x értékek jellemzik, vagyis ez a koordinátarendszer nincs $\mathcal{I}$-hez rögzítve. Ezért pl. az $x = vt$ pályán mozgó tömegpont csak a $t < 0$ tartományban mozog v sebességgel $\mathcal{I}$-hez képest. A $t > 0$ tartományban a vonatkoztatási rendszerhez viszonyított sebességét $(\dagger)$ második egyenletéből kell kikövetkeztetni.

Most térjünk vissza ikerpárunkhoz és az Alszeg és Felszeg között ingázó vonathoz. Tegyük fel, hogy a pálya végig egyenes. Képzeljük úgy, hogy a vonat nagyon messziről érkezik Alszegre, ahol nem is áll meg, és Béta már rajta ül a legelső kocsiban. Amikor a vonat megérkezik Felszegre azonnal elindul vissza. A vonat sebessége az oda- és visszaúton egyaránt a konstans V-vel egyenlő.

Alfa és Béta most is kétszer találkozik egymással és feltehetjük, hogy az első találkozáskor mindkettőjük órája ugyanannyit mutatott (mondjuk nullát). A második találkozáskor Béta órája kevesebbet fog mutatni. Az Alszeg-Felszeg tartomány inerciarendszerében számolva (2.11.1) segítségével azt találjuk, hogy $T_\beta = T_\alpha\sqrt{1 - V^2/c^2} < T_\alpha$.

A feltételek egyszerűsége miatt most a vonat nyugalmi rendszeréből is el tudjuk végezni a számítást. Azonban mindjárt az elején problémába ütközünk. A vonat nyugalmi rendszere most az oda úton is, a visszaúton is inerciarendszer, mert egyenletes egyenesvonalú mozgást végez egy másik inerciarendszerben. De akkor (2.11.1) a vonat nyugalmi rendszerében is alkalmazható, és most azt kapjuk belőle, hogy mivel Alfa az, aki mozog, az ő órája jár lassabban: $T_\alpha \stackrel{?}{=} T_\beta\sqrt{1 - V^2/c^2} < T_\beta$. De az nem függhet a vonatkoztatási rendszer választásától, hogy amikor két óra találkozik, melyik mutat többet. Hol a hiba?

A válaszhoz keressük meg a vonathoz rögzített koordinátarendszert. Logikus abból kiindulni, hogy az utazás első szakaszában a vonathoz Minkowski koordinátákat rögzítünk. Tegyük fel, hogy a vonat visszafordulása ebben a koordinátaidőben a $t = 0$ pillanatban történik[2]. Ezután már ez a koordinátarendszer nyilván nem lesz a vonathoz rögzítve. De ha az előző példánkban leírt koordinátarendszerben az U-t alkalmasan választjuk, olyan koordinátarendszerhez jutunk, amely az oda- és visszaúton egyaránt rögzítve lesz a vonathoz. Ehhez az U-t azzal a sebességgel kell egyenlőnek választani, amellyel a vonat a visszaúton mozog *az odafele mozgó vonathoz képest.* A sebességösszeadás törvénye alapján ezt könnyű kiszámítani:

$$U = \frac{-2V}{1 + V^2/c^2}. \qquad (\clubsuit)$$

Ezzel a választással a (†) koordinátarendszert pont úgy választottuk meg, hogy ebben az esetben a vonaton ülő Béta és a vonaton nyugvó órák (mindegyikre $x = konstans$), amelyekkel Alfa a saját óráját összehasonlítja, $t > 0$-ban egyenletes $-V$ sebességgel halad a pályatesthez képest. A (†)-ben a t időkoordináta értelme is megfelel a feladatnak, ugyanis *végig* egyenlő a vonathoz képest nyugvó órák által mutatott idővel.

Ha U-nak ezt az értékét behelyettesítjük (†)-ba, a

$$ds^2 = \begin{cases} c^2dt^2 - dx^2 & \text{ha } t < 0 \\ c^2dt^2 + 4\dfrac{V/c}{1 - V^2/c^2}c\,dt \cdot dx - dx^2 & \text{ha } t > 0. \end{cases} \qquad (\sharp)$$

ívelemnégyzetre jutunk. Ez mutatja, hogy a $t > 0$ tartományban a ct, x koordinátarendszer nem Minkowski; Minkowski-koordinátákban ugyanis $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$. A ($\sharp$) szerint ebben a koordinátarendszerben $t > 0$-nál a fény nem ugyanazzal a sebességgel terjed pozitív és negatív irányban. Valóban, a fénysugáron $ds^2 = 0$, ezért ($\sharp$)-ből a $\dfrac{dx}{dt}$ fénysebességre a

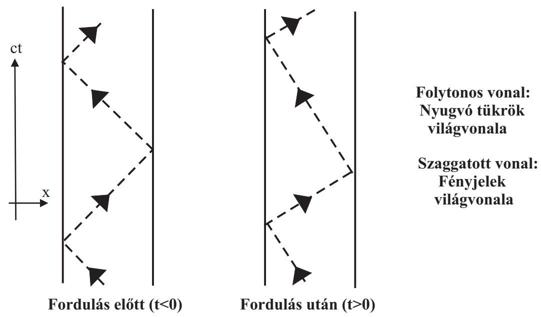
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{4V}{1 - V^2/c^2}\frac{dx}{dt} - c^2 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelyből

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\pm} = c\frac{V/c \pm (1 + V^2/c^2)}{1 - V^2/c^2}.$$

A vonat maga természetesen ekkor is inerciarendszer, amelyben a fény terjedése izotróp. Ennek tapasztalati igazolása nem igényel koordinátarendszert. Azonban $t = 0$-ban pillanatszerű gyorsulásnak volt kitéve és ez — mint látjuk,

[2] Annak, aki az indokoltnál realisztikusabban képzeli el a vonatot, el kell gondolkoznia azon, hogyan is történik ez a visszaindulás. Nem a pillanatszerűsége a fő probléma; ezt tekinthetjük egy nagyon gyors visszaindulás határesetének. A gond az, hogy a vonat minden porcikájának ugyanabban a $t = 0$-ban kell irányt változtatnia. Ezt elvi okokból nem lehet egyetlen mozdony segítségével megvalósítani, mert az kellene hozzá, hogy a rugalmas erők végtelen sebességgel terjedjenek a vonatban. De ha mindegyik vagon motorkocsi, amelyet a rajta nyugvó helyesen szinkronizált óra vezérel, akkor megvalósítható, hogy az egész szerelvény a $t = 0$-ban induljon el visszafele.



7. ábra.

— arra vezetett, hogy a koordinátaidőt mutató virtuális órák Einstein-szinkronizációja elromlott, a $t > 0$ tartományban a koordinátaidőt mutató képzeletbeli órák nincsenek összhangban a fényterjedés izotrópiájával. Ha két egymás felé fordított tükör között fényjel mozog oda-vissza, akkor a tükrök mellett nyugvó valóságos órák mutatni is fogják, hogy $t > 0$-ban az oda- és a visszautat a fényjel különböző idő alatt teszi meg (7. ábra).

A vonat gyorsulása természetesen tehetetlenségi erőben is megnyilvánul. Létezik általános eljárás arra, hogy egyedül a ds^2 képletének ismeretében hogyan lehet meghatározni a szabadon mozgó tömegpontok pályáját. Ezt a módszert azonban nem ismertethetjük, de az eredményét megkaphatjuk a $(*)$ jobboldali egyenletpárja segítségével, amelyben a $t > 0$-beli koordináták még vesszőzve vannak. Az eredeti koordinátákban az $x = a$ pontban nyugvó test az új koordinátákban csak $t < 0$ marad nyugalomban. Ha $(*)$ utolsó egyenletébe $x = a$-t helyettesítünk és U-t $(\clubsuit)$ segítségével V-vel helyettesítjük, a tömegpont pályájára $t > 0$-nál (a vesszők elhagyása után) az $x = \dfrac{2V}{1 + V^2/c^2}ct + a$ egyenletet kapjuk. Ez mutatja, hogy vonatkoztatási rendszerünkben a $t = 0$ pillanatban pozitív irányú tehetetlenségi erő-löket hatott. Az erő-löket által nyert sebesség és a koordináta-idő szinkronizáltságában bekövetkezett változás a vonatkoztatási rendszer gyorsulásának maradandó következményei.

Az ikerparadoxont most már vizsgálhatjuk a vonat nyugalmi rendszeréből anélkül, hogy hivatkozni kellene az állomások inerciarendszerére. Ehhez meg kell határozni Alfa pályáját ebben a koordinátarendszerben. A $t < 0$ tartományban a pálya nyilván $x = -V(t + t_0)$. Feltesszük, hogy Beta az $x = 0$ pontban ül a vonaton, ezért a $t = -t_0$ az a pillanat (a vonat koordinátaidejében értve), amelyben Alfa elhalad Béta mellett.

Mekkora lesz Alfa sebessége a $t > 0$ tartományban a vonat nyugalmi rendszerében. Hajlamosak lehetünk rávágni, hogy $+V$-vel, de ez egyáltalán nem biztos, mert mint $(\sharp)$ mutatja, a vonat koordinátarendszere ekkor elég különleges. A sejtés ennek ellenére igaz. A $(*)$ baloldali egyenletpárjából

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} \left(\frac{dx}{dt} - U \right).$$

De az eredeti vesszőtlen koordinátákban Alfa sebessége nyilván $\frac{dx}{dt} = -V$. Ha ezt az előző egyenletbe beírjuk és U-t kifejezzük V-n keresztül, a $\frac{dx'}{dt'} = +V$ eredményt kapjuk. A vonat nyugalmi rendszerében tehát Alfa pályája a következő:

$$x = \begin{cases} -V(t+t_0) & \text{ha } t \leq 0 \\ +V(t-t_0) & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

Béta a vonat $x = 0$ pontjában nyugszik, ezért az Alfával történő két találkozás időpontja $t = \pm t_0$. Mennyi idő telik el ezalatt az órájukon? A $d\tau = \sqrt{ds^2}/c$ alapján erre a kérdésre ($\sharp$) tartalmazza a választ. Mivel Béta nyugszik, ezért az ő pályáján $dx = 0$, ílymódon $d\tau = dt$. A $-t_0 \leq t \leq t_0$ intervallumban tehát az ő óráján $T_\beta = 2t_0$ idő telik el.

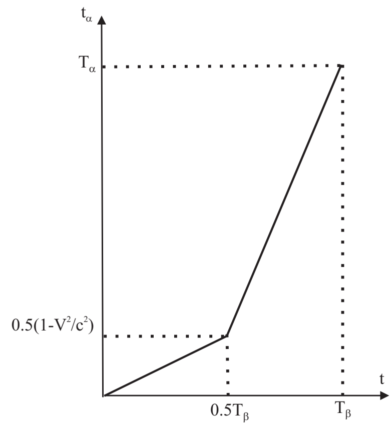
Alfa pályáján $t > 0$-nál $dx = -Vdt$, $t < 0$-nál pedig $dx = +Vdt$. Ezt ($\sharp$) jobboldalába írva összevonások után a

$$d\tau \equiv dt_\alpha = \begin{cases} dt\sqrt{1 - V^2/c^2} & \text{ha } t \leq 0 \\ dt\sqrt{1 + 4\dfrac{V^2/c^2}{1 - V^2/c^2} - V^2/c^2} = dt\dfrac{1 + V^2/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

Ebből a képletből integrálással lehet meghatározni a $t_\alpha(t)$ függvényt, vagyis azt, hogy milyen ritmusban jár Alfa órája a vonat nyugalmi rendszerében. Az integrálás triviális, mert dt szorzója konstans. A konstans értéke azonban a pálya két szakaszán nem ugyanaz. Az első szakaszban ($-t_0 < t < 0$-ban) Alfa órája $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ arányban késik, a másodikban ($0 < t < t_0$-ban) azonban sietni kezd, és a Bétával való újbóli találkozás pillanatában ($t = t_0$-ban) már $T_\alpha = 2t_0/\sqrt{1 - V^2/c^2} = T_\beta/\sqrt{1 - V^2/c^2} > T_\beta$-t mutat. Ez pontosan ugyanaz az eredmény amit az Alfa nyugalmi rendszerében végzett igen egyszerű számításból is kaptunk (8. ábra).

Most válaszolni tudunk arra a kérdésünkre, hogy a vonat nyugalmi rendszerében végzett számításnál miért nem jár lassabban Alfa órája a visszaúton is annak ellenére, hogy a vonat ekkor is inerciarendszer? Az ok az, hogy a visszaúton a vonathoz rögzített koordinátarendszer nem Minkowski.

Emlékeztetünk rá, hogy a 2.12 fejezet tulajdonképpeni célja annak demonstrálása volt, hogy az a kérdés, milyen ritmusban alakul ki az idődilatáció nagysága a gyorsuló testvér nézőpontjából, rosszul (hiányosan) feltett kérdés, ha egyidejűleg nem specializáljuk a koordinátaidőt az utazó testvér nyugalmi rendszerében. Valóban, az egyik koordinátaidő választásnál azt találtuk, hogy éppúgy fokozatosan nő, mint a nyugvó testvér inerciarendszerében a Minkowski koordinátaidőhöz képest, a másiknál pedig azt, hogy a visszaúton sokkal gyorsabban változik, mint az odaúton. És ha a második esetben a visszaúton rendelnénk Minkowski-koordinátákat a vonathoz, akkor egy harmadik változatot kapnánk a $t_\alpha(t)$ függvényre. De ez egyáltalán nem baj, mert a $t_\alpha(t)$ függvény tényleges



8. ábra.

megfigyeléséhez az kellene, hogy a koordinátaidőt mutató órák valóságosan is létezzenek. Ez azonban nincs így, vagy ha néhány ilyen óra valamilyen okból tényleg „ott van", akkor az is meg van róluk mondva, hogyan vannak beállítva (szinkronizálva).

Egy kérdést azonban még fel lehet tenni. A vonathoz rögzített koordinátarendszert két információ határozza meg: (1) A ds^2 függvény konkrét alakja (esetünkben ez a (♯) képlet) és (2) az az információ, hogy a vonatkoztatási rendszerünk (a vonat) *nyugszik* ebben a koordinátarendszerben (vagyis minden vasúti kocsi minden eleme konstans x-szel rendelkezik). Hogyan lehet ennek alapján *belátni*, hogy a vonat a visszaúton is inerciarendszer?

Ez azon múlik, hogy a $t > 0$ tartományban át lehet-e térni olyan (vesszős) koordinátarendszerre, amelyben az ívelemnégyzet $c^2dt'^2 - dx'^2$ alakú és a vonat minden egyes része az $x' = konstans$ világvonalon mozog. Ezt valóban meg lehet tenni. Első lépésben helyettesítsük (♯) második egyenletében t-t t'-vel a

$$ct = ct' - 2\frac{V/c}{1 - V^2/c^2}\,x$$

képlet segítségével. Ekkor (összevonások után) az ívelemnégyzet a

$$ds^2 = c^2dt'^2 - \left(\frac{1 + V^2/c^2}{1 - V^2/c^2}\right)^2 dx^2$$

alakot veszi. Ebben a lépésben a koordinátaidőt mutató virtuális órákat minden pontban különböző mértékben átállítottuk, a térkoordinátához azonban nem nyúltunk. Ezután már elég az x-t átskálázni az

$$x = \frac{1 - V^2/c^2}{1 + V^2/c^2}\,x' \qquad (♮)$$

képlet alapján ahhoz, hogy az ívelemnégyzet Minkowski alakú legyen. Nyilvánvaló, hogy a vonat pontjainak az x' koordinátái sem változnak időben, ezért a vesszős koordináták is a vonathoz vannak rögzítve.

Tekintsük végül a vonat két adott ξ és $\xi+\Delta\xi$ koordinátájú pontját. Mivel $\theta<0$-nál a $c\theta$, ξ koordinátarendszer azonos a ct, x Minkowski-koordinátarendszerrel, ezért a fordulás előtt a két kiválasztott pont Δl távolsága $|\Delta\xi|$-vel egyenlő. A fordulás után a ct', x' koordinátarendszer Minkowski, ezért ekkor ugyanazon két pont $\Delta l'$ távolságát a pontok x'-koordinátakülönbsége határozza meg. A kettő kapcsolata ($\natural$) szerint a következő:

$$\Delta l' = \frac{1+V^2/c^2}{1-V^2/c^2}\,\Delta l.$$

Ez a képlet fejezi ki az irányváltás újabb maradandó hatását, a vonat pontjai közötti távolság megnövekedését.

GYAKORLÓ FELADATOK.

1) Einstein vonatkísérletében az állomás nyugalmi rendszerében a vonat elején a robbanás később történik, mint a végén. Mennyivel? (A vonat nyugalmi hossza legyen l_0, a sebessége pedig V.)

Megoldás: Az állomás $\mathcal{I}$ vonatkoztatási rendszeréhez viszonyítva a fényjelek elindulásának pillanatában a vonat eleje és vége $\frac{1}{2}l_0\sqrt{1-V^2/c^2}$ távolságra van a fényjelektől. Ez a távolság a fényjel és a vonat eleje között $(c-V)$, a fényjel és a vonat vége közötti pedig $(c+V)$ ütemben csökken, ezért

$$\Delta t_e = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(c-V)}, \qquad \text{illetve} \qquad \Delta t_v = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(c+V)}$$

idő alatt fogy el. Ennek a két időtartamnak a különbsége a Δt:

$$\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_v = \frac{1}{2}l_0\sqrt{1-V^2/c^2}\cdot\left(\frac{1}{c-V}-\frac{1}{c+V}\right) = \frac{V\cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Ezt a képletet természetesen Lorentz-transzformációval is könnyű megkapni. Az állomás legyen a vesszőtlen, a vonat a vesszős rendszer. Mivel $\mathcal{I}$ '-ben a két robbanás egyidejű ($\Delta t'=0$), $\Delta x' = x'_v - x'_e = l_0$ távolságra történnek egymástól, és az $\mathcal{I}$ inerciarendszer $(-V)$ sebességgel mozog $\mathcal{I}$ '-hez képest, ezért a Lorentz-transzformáció képlete alapján a vonat elején a robbanás $\mathcal{I}$-ben

$$\Delta t = \frac{+\frac{V}{c^2}l_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{A}$$

idővel később történik, mint a végén.

***

2) Egy l_0 nyugalmi hosszúságú vonat elején és végén egy-egy jelzőlámpa villog. A vonat nyugalmi rendszerében a felvillanások periódusideje T_0 és a két jelzőlámpa felvillanásai pontosan szinkronban vannak egymással (mindkettő ugyanabban a pillanatban villan fel). Elképzelhető-e, hogy a villanások akkor is pontosan szinkronban legyenek egymással, amikor a vonat valamilyen sebességgel egyenletesen halad?

Megoldás: Amikor a vonat V sebességgel halad, a felvillanások egyidejűsége megszűnik. Amikor a sebesség kicsi, a vonat elején a felvillanás egy kicsit késik a vonat végén történő megfelelő felvillanáshoz képest. A V növelésével a késés egyre nő és elképzelhető, hogy egy bizonyos V_1 sebességnél a felvillanás a vonat elején egyidejűvé válik azzal a vonat végén bekövetkező felvillanással, amelyik a neki megfelelő felvillanás *után* következik. Amikor ez megtörténik, a felvillanások a mozgó vonaton is egyidejűek. Mekkora ez a V_1 sebesség?

A foglmazás egyszerűsítésére jelöljük a nyugalmi rendszerben egyidejű felvillanásokat azonos sorszámmal: A nyugvó vonaton az i-ik felvillanás a vonat végén egyidejű az i-ik felvillanással a vonat elején. A keresett V_1 az a sebesség, amelynél a vonat végén az i-ik felvillanás az $i+1$-ik felvillanással egyenlő a vonat elején. Vagy kicsit másképpen fogalmazva: A $-V_1$ sebességgel mozgó inerciarendszerből nézve ez a két felvillanás válik egyidejűvé egymással. De akkor a 2.5 szakasz 3. pontja alapján ennek a két eseménynek térszerű eseménypárnak kell lennie, amelynek a feltétele a

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 < 0.$$

egyenlőtlenség teljesülése. Mivel ez a kifejezés invariáns, az értékét kiszámíthatjuk a vonat nyugalmi rendszerében, ahol $\Delta l = l_0$ és $\Delta t = T_0$. Vagyis ahhoz, hogy a V_1 sebesség egyáltalán létezzen, a

$$\Delta s^2 = c^2 T_0^2 - l_0^2 < 0 \qquad \longrightarrow \qquad l_0/T_0 > c \tag{$*$}$$

egyenlőtlenség szükséges (és elégséges). Ha ez teljesül, a 2.5 szakasz 3. pontja alapján a szóbanforgó két esemény — az i-ik felvillanás a vonat elején és az $i+1$-ik a végén — akkor egyidejű, amikor a vonat $V_1 = c^2 \cdot T_0/l_0$ sebességgel halad. A $(*)$ képlet következtében $V_1 < c$.

Hasonlóan látható, hogy az i-ik felvillanás a vonat elején és az $i+k$-ik a végén akkor egyidejű egymással, amikor

$$V_k = c^2\frac{kT_0}{l_0} \qquad \text{hacsak} \qquad l_0/kT_0 > c.$$

Ahhoz tehát, hogy a mozgó vonaton különböző sorszámú felvillanások egyidejűek lehessenek az l_0-nak elég nagynak és/vagy a T_0-nak elég kicsinek kell lennie.

***

3) Einstein vonatkísérlete fényjelek helyett pisztolygolyókkal is elképzelhető. Az l_0 nyugalmi hosszúságú V sebességgel haladó vonat középpontjából két azonos szerkezetű pisztolyból egyszerre adunk le egy-egy lövést a vonat eleje és vége irányában. A golyók sebessége természetesen kisebb mint c. Milyen időkülönbséggel csapódnak be a golyók a vonat végébe és elejébe az állomás vonatkoztatási rendszeréhez viszonyítva?

1.Megoldás: A két esemény a vonat vonatkoztatási rendszerében most is ugyanabban az időpontban egymástól l_0 távolságra történik, ezért a válasz ugyanaz, mint Einstein eredeti vonatkísérletében (ld.az 1.feladat (A) képletét):

$$\Delta t = \frac{l_0 V}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (A)$$

2.Megoldás: A pisztolygolyók torkolatsebessége legyen v. A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy $v > V$. A vonat eleje és vége felé repülő golyók sebességének nagysága az állomás nyugalmi rendszeréhez viszonyítva

$$v_e = \frac{v+V}{1+vV/c^2}, \qquad \text{és} \qquad v_v = \left|\frac{-v+V}{1-vV/c^2}\right| = \frac{v-V}{1-vV/c^2},$$

a repülési idejük pedig

$$\Delta t_e = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(v_e - V)} \qquad s \qquad \Delta t_v = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(v_v + V)}.$$

A nevezőkben

$$v_e - V = \frac{v(1-V^2/c^2)}{1+vV/c^2} \qquad \text{és} \qquad v_v - V = \frac{v(1-V^2/c^2)}{1-vV/c^2}.$$

A keresett Δt idő a Δt_e és a Δt_v különbsége:

$$\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_v = \frac{l_0}{2\sqrt{1-V^2/c^2}}\cdot\frac{1}{v}\cdot[(1+vV/c^2)-(1-vV/c^2)] = \frac{l_0 V}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

az (A)-val összhangban.

A newtoni esetben a megfelelő képletek a következők:

$$v_e = v+V, \qquad v_v = v-V,$$

$$\Delta t_e = \frac{l_0}{2(v_e - V)} = \frac{l_0}{2v}, \qquad \Delta t_v = \frac{l_0}{2(v_v + V)} = \frac{l_0}{2v},$$

és $\Delta t = 0$, ahogy lennie kell.

***

4) Egy rablóbanda elhatározza, hogy kirabol egy kincsszállító vonatot. A terv alapja az, hogy a vonat áthalad egy alagúton. A banda az alagút két bejáratára titokban erős, kapuszerű sorompót szerel fel, amelyeket rádiójellel lehet lezárni. Az egyik bandatag az alagút két végétől egyenlő távolságra lévő pontban helyezkedik el a jeladóval és a bandavezértől azt a parancsot kapja, hogy amikor a vonat eltűnik az alagútban, hozza működésbe a sorompókat. Az alagútban rekedt vonatot azután a banda többi tagja elfoglalja és kifosztja.

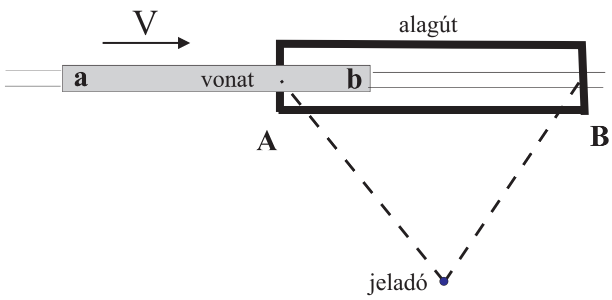
A bandavezér azonban váratlan üzenetet kap a szerelvény összeállításában segédkező egyik vasutastól, aki a bűntársa. Eszerint a szerelvény hosszabb, mint amire számítottak, véletlenül pont olyan hosszú, mint az alagút, ezért az akciót le kell fújni. A bandavezér azonban, aki főállásban elméleti fizikus, megnyugtatja az informátort: A Lorentz-kontrakció miatt a vonat teljes egészében el fog férni az alagútban, a terv tehát végrehajtható marad.

A vonat elindulása után a titkosszolgálat valahogy megneszeli a készülő rajtaütést és mobiltelefonon utasítja a vonatvezetőt, hogy azonnal állítsa le a vonatot. A vonatvezető azonban jó volt fizikából és megnyugtatja a titkosszolgálat emberét: Az alagút a vonathoz képest Lorentz-kontrakciót szenved, a vonatnak legalább az egyik vége biztosan ki fog lógni az alagútból, ezért a jeladónál figyelő bandatagnak nem lesz alkalma beindítani a sorompók működését.

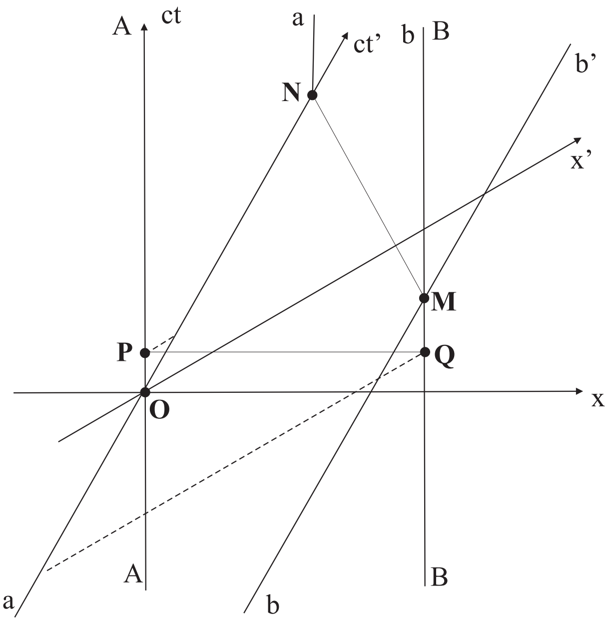
Kinek van igaza, a bandavezérnek vagy a vonatvezetőnek? És miben tévedett a másik?

Megoldás: A bandavezérnek van igaza. A jeladó szimmetrikus helyzetben nyugszik az alagút A és B végpontjához képest, ahol a sorompókat a banda felszerelte. Az alagút (vagyis a vasúti töltés) $\mathcal{I}$ nyugalmi rendszerében ezért a sorompók zárása egyidőben történik. A vonat az $\mathcal{I}$-hez képest V sebességgel mozog, ezért Lorentz-kontrakciót szenved. A feladat szerint a nyugalmi hossza egyenlő az alagút nyugalmi hosszával, így a Lorentz-kontrakció következtében $\mathcal{I}$-ben rövidebb, mint az alagút: Amikor a vonat a vége eltűnik az alagút A bejáratánál, az eleje (a b pontja) még nem éri el az alagút B kijáratát. Ezért ha a jeladót ebben a pillanatban működésbe hozzák, a vonat valóban bent ragad az alagútban, és a banda megrohanhatja.

Természetesen jól fel kell szerelkezniük lángvágókkal, mert a B kijárati kapuba történő beleütközés következtében a szerelvény hossza még a mozgási



4.1 ábra



4.2 ábra

hossznál is rövidebbre préselődik össze. A vonat elejének (a b pontnak) a hirtelen lefékeződésénél keletkező "löket" ugyanis legfeljebb fénysebességgel haladhat végig a vonaton, és ennek következtében a vonat vége (az a pont) egy ideig még mozgásban marad a vonat elejének hirtelen leállása után is.

Miben tévedett a vonatvezető? Abban teljesen igaza volt, hogy a vonat nyugalmi rendszerében az alagút Lorentz-kontrakciót szenved, és ha nem jön közbe semmi, a vonatnak legalább az egyik vége mindig biztosan kilóg az alagútból. Azonban nem vette figyelembe az egyidejűség relativitását, amelynek következtében a vonat $\mathcal{I}$' nyugalmi rendszerében a sorompók működése nem egyidőben történik, és azt sem, hogy a hatások még a hétköznapi értelemben szilárd anyagokban sem terjedhetnek a fénynél gyorsabban.

Mivel az alagút a vonathoz képest $-V$ irányban mozog, a jeladóból a B felé haladó rádiójel előbb zárja le a B sorompót, mint a másik rádiójel az A sorompót. Amikor a B-beli sorompó beleütközik a vonat b elejébe, a ($\mathcal{I}$'-ben nyugvó) vonat vége (az a pont) az alagút Lorentz-kontrakciója következtében még kilóg az alagútból és a lökés véges terjedési sebessége következtében egy ideig még nyugalomban marad. Még akkor is nyugalomban lesz, amikor az A kapu áthalad rajta és az egész vonatot elnyeli az alagút, hiszen a jeladót csak közvetlen ezután hozzák működésbe. A vonat elejéből kiinduló lökés csak ezután éri el a vonat végét, ekkor veszi fel az egész vonat az alagút $\mathcal{I}$'-beli sebességét. Az alagúthoz viszonyítva nyugalomba került vonat hosszának a roncsolódás következtében még a mozgási hossznál is rövidebbnek kell lennie, hiszen különben nem férne el a V sebességgel mozgó alagútban, amelynek mozgási hossza megegyezik a vonat $\mathcal{I}$-beli mozgási hosszával a leállás előtt.

Ez a két forgatókönyv Lorentz-transzformáció segítségével igazolható, de ezzel egyenértékű, ha a téridő-ábrán demonstráljuk a helyességüket (4.2 ábra). A koordinátarendszer O origója az az esemény, amikor a vonat a végpontja és az alagút A bejárata éppen egybeesik. Az alagút az AA és a BB világvonalak közötti sávot foglalja el. Ha a sorompókat nem hoznák működésbe, a vonat a ct' tengely és a bb' egyenes közötti sávot foglalná el. A vonat és az alagút nyugalmi hosszának egyenlőségét az fejezi ki, hogy a BB egyenes és az x-tengely metszéspontja, valamint a bb' egyenes és az x'-tengely metszéspontja rajta van ugyanazon az $x^2 - c^2t^2 = l_0^2$ hiperbolán. A rajz mutatja, hogy $\mathcal{I}$-hez viszonyítva a vonat teljesen elfér az alagútban, az $\mathcal{I}$ '-höz viszonyítva azonban az alagút fér el teljesen a vonat hosszán belül. Az alagút A sorompójának a bezárása a P, a B sorompójának bezárása pedig a Q esemény. Az alagút $\mathcal{I}$ vonatkoztatási rendszeréhez rögzített vesszőtlen $\mathcal{K}$-ban ez a két esemény ugyanabban a pillanatban történik, ezért az őket összekötő egyenes párhuzamos az x-tengellyel. A sorompók működése következtében a vonat most az $aONa$ és a bMb sávot foglalja el. A vonat b elejének beleütközése a B sorompóba az M esemény. Ettől kezdve a vonat eleje és az alagút B kijárata ugyanazon a (függőleges) világvonalon fekszik. Az ütközés által okozott hatás az $M \to N$ világvonalon terjed a vonaton visszafelé és az N pontban éri el a vonat elejét, amely ekkor áll meg. Az MN szakasz 45°-nál kisebb szöget zár be a ct tengellyel, mert a lökés terjedési sebessége c-nél kisebb.

A vonat sebességével mozgó $\mathcal{I}$ '-hez rögzített vesszős $\mathcal{K}$'-ben a $ct' = konstans$ vonalak az x' tengellyel párhuzamos egyenesek. Ennek alapján jól látható, hogy a B sorompó zárása negatív t'-nél, az A kapué pedig pozitív t'-nél történik. Ezek közé esik a $t' = t = 0$ pillanat, amikor a vonat a vége is eltűnik az alagútban.

***

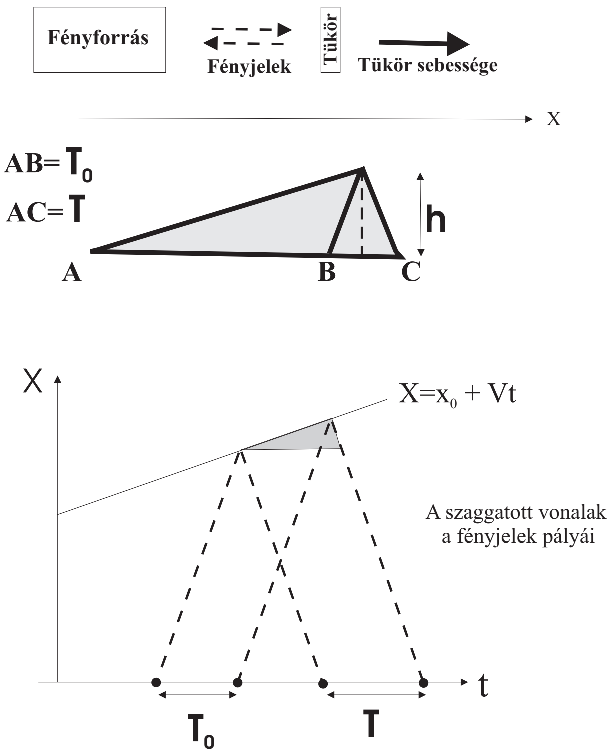
5) Egy fényforrás T_0 időközönként bocsát ki fényjeleket, amelyeket egy tőle V sebességgel távolodó tükör ver vissza. Milyen T időközönként érkeznek vissza a jelek a forráshoz a newtoni fizika és a relativitáselmélet szerint?

1.Megoldás: Végezzük el a számítást először a newtoni felfogás alapján. Jelöljük T'-vel két egymást követő jel tükörre történő érkezése (és a róla való visszaverődése) között eltelt időt. Mivel a tükör mozog, a T'-t az adó nyugalmi rendszerében érvényes (1.2.3) képlet segítségével számíthatjuk ki a T_0 alapján: $T' = T_0/(1 - V/c)$.

A visszavert jelek szempontjából a tükör az adó, ezért a T-t a T' alapján a vevő nyugalmi rendszerében érvényes (1.2.1) képlet segítségével kaphatjuk meg: $T = T'(1 + V/c)$. Ha ide T'-t az előző képletből behelyettesítjük, megkapjuk a feladat megoldását a newtoni felfogásban:

$$T = T_0 \frac{1 + V/c}{1 - V/c}. \qquad (A)$$

A relativitáselmélet szerint ugyanez a gondolatmenet érvényes, csak mindkét



5.1 ábra

esetben az (1.2.6) képletet kell alkalmazni:

$$T' = T_0\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}} \qquad \text{és} \qquad T = T'\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}.$$

Ebből a két képletből ugyanazt az (A) eredményt kapjuk, mint előbb. Ez az eredmény összhangban van azzal, hogy a T_0 és a T kapcsolatában nincs szerepe az idődilatációnak, mivel mindkettőt mérhetjük ugyanazzal az órával (vagy két egymáshoz képest nyugvó órával). Az idődilatációra csak a T' érzékeny, ezért a T'-re a newtoni és a relativisztikus számítás nem is adja ugyanazt az eredményt.

2.Megoldás: Az 5.1 ábra a tükör és a fénysugarak pályáját mutatja. A kirajzolt háromszögből

$$h = V\left(T_0 + \frac{T-T_0}{2}\right) = c\frac{T-T_0}{2}.$$

Ezt T-re megoldva kapjuk (A)-t. Mivel mindkét időtartamot ugyanazzal az órával (vagy két egymáshoz képest nyugvó órával) mérjük, ez a képlet a newtoni és a relativisztikus esetben egyformán érvényes.

***

6) Egy biciklista v sebességgel karikázik a vasúti töltés mentén. Szembe jön vele V sebességgel egy vonatszerelvény, amelynek nyugalmi hossza l_0. Mennyi ideig halad a biciklista a vonat mellett a saját órája szerint a newtoni és a relativisztikus fizika alapján?

Megoldás: A newtoni fizikában a válasz nyilván $l_0/(V+v)$. A relativisztikus számítás a töltés $\mathcal{I}$ nyugalmi rendszerében a legegyszerűbb. Amikor a vonat eleje elhalad a biciklista mellett, a vonat vége a biciklistától $l_0\sqrt{1-V^2/c^2}$ távolságra van. A közöttük lévő távolság $V+v$ sebességgel csökken, ezért koordinátaidőben mérve

$$\Delta t = l_0 \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v}$$

idő alatt válik nullává. A biciklizö óráján ezalatt

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1-v^2/c^2} = l_0 \frac{\sqrt{1-V^2/c^2} \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}{V+v} \tag{A}$$

idő telik el.

A számítás a vonat vagy a kerékpáros nyugalmi rendszerében valamivel bonyolultabb, de természetesen ugyanerre az eredményre vezet (a $\Delta\tau$ invariáns). A vonat $\mathcal{I}$ ' nyugalmi rendszerében például a biciklista sebessége a sebességösszeadás törvénye szerint

$$v' = \frac{v+V}{1+vV/c^2}$$

-tel egyenlő. A vonat hossza itt l_0, ezért a biciklista koordinátaidőben értve

$$\Delta t' = \frac{l_0}{v'}$$

ideig halad a vonat mellett, amelynek

$$\Delta\tau = l_0 \frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}}{v'}$$

sajátidő felel meg. Ha ide v' fenti kifejezését behelyettesítjük, átalakítások után újra az (A) képletre jutunk.

***

7) Egy V sebességgel mozgó masszív (végtelen tömegűnek tekinthető) falról rugalmasan visszapattan egy ugyanolyan irányban $v = 2V$ sebességgel repülő labda. Mekkora lesz a labda u sebessége a visszapattanás után a newtoni és a relativisztikus fizika szerint?

Megoldás: Az az inerciarendszer, amelyben a feladat adatai érvényesek, legyen a vesszőtlen $\mathcal{I}$. A számítás alapja az, hogy a fal $\mathcal{I}$ ' nyugalmi rendszerében a labda sebességének nagysága a visszapattanásnál nem változik.

A newtoni fizika szerint $\mathcal{I}$ '-ben a labda sebessége a visszapattanás előtt $v' = v - V = 2V - V = V$-vel, a visszapattanás után pedig $-v' = -V$-vel egyenlő. Az eredeti $\mathcal{I}$ $(-V)$ sebességgel mozog $\mathcal{I}$ '-hez képest, ezért a visszapattanás után a labda sebessége $\mathcal{I}$-ben $u = (-v') - (-V) = 0$. A newtoni fizika szerint tehát a labda a visszapattanás után nyugalomban lesz.

A gondolatmenet a relativitáselméletben is ugyanez, csak a relativisztikus sebességösszeadás képletével kell számolnunk. A két számítás lépéseit a következő táblázat tartalmazza:

	GOLYÓ SEBESSÉGE	NEWTONI	RELATIVISZTIKUS
0.	$\mathcal{K}$-ban ütközés előtt	$2V$	$2V$
1.	$\mathcal{K}$'-ben ütközés előtt	$2V - V = V$	$\frac{2V-V}{1-2V\cdot V/c^2} = \frac{V}{1-2V^2/c^2}$
2.	$\mathcal{K}$'-ben ütközés után	$-V$	$-\frac{V}{1-2V^2/c^2}$
3.	$\mathcal{K}$-ban ütközés után	$-V - (-V) = 0$	$\frac{-\frac{V}{1-2V^2/c^2}-(-V)}{1-\left(-\frac{V}{1-2V^2/c^2}\right)(-V)} = -2V\frac{V^2/c^2}{1-3V^2/c^2}$

A táblázat utolsó sora szerint tehát a relativisztikus esetben a labda sebessége a visszapattanás után

$$u = -2V\frac{V^2/c^2}{1-3V^2/c^2}$$

-tel egyenlő. Ez összhangban van a newtoni eredménnyel, mert a $c \to \infty$ határesetben a jobboldal nullához tart. A másik határeset az, amikor a labdát fényjellel, a falat pedig tükörrel helyettesítjük. Ekkor $V = c/2$, és a képletünk alapján $u = -c$, ahogy lennie is kell.

***

8) Egy egyenes autópálya minden pontján rövid $\Delta\tau$ időközönként halad át egy egyenletesen v sebességgel pozitív irányban haladó autó.

(1) Hány autót találunk átlagban az autópálya $l \gg v \cdot \Delta\tau$ hosszúságú $\overline{AB}$ szakaszán?

(2) Hány autót találunk ugyanezen az $\overline{AB}$ szakaszon abban az esetben, amikor a pályát egy $(-V)$ sebességgel mozgó inerciarendszerhez viszonyítjuk (amelyhez képest a pálya V sebességgel mozog pozitív irányban)?

Megoldás: Az első esetben az autók átlagszámát jelöljük N-nel. Mivel egy autó, miután áthaladt a szakasz A kezdőpontján, $T = l/v$ ideig tartózkodik $\overline{AB}$-n belül, és ezalatt az idő alatt $T/\Delta\tau$ autó lépi át az A pontot, ezért a pálya $\mathcal{I}$ vonatkoztatási rendszerében

$$N = \frac{T}{\Delta\tau} = \frac{l}{v \cdot \Delta\tau} \gg 1. \tag{A}$$

Az $\mathcal{I}$ ' mozgó inerciarendszerhez viszonyított számot jelöljük N'_+-szal (a $+$ alulindex arra utal, hogy az autók v sebessége és a pálya V sebessége $\mathcal{I}$ '-ben ugyanolyan irányú). Első pillanatban azt gondolnánk, hogy N'_+ nem különbözhet N_+-tól, de aztán rájövünk, hogy az egyidejűség relativitása miatt ez mégsincs így.

Ahhoz, hogy ez szembetűnő legyen, fogalmazzuk át egy kicsit az előző gondolatmenetet. Adjunk nevet a kiszemelt autónak: Legyen Autó$_1$. Az A kezdőponton áthaladó autókat addig számoljuk, míg Autó$_1$ eléri B-t. *Ebben a pillanatban* az A-ban (gondolatban) lezárjuk a sorompót. Az (A) képlet azoknak az autóknak a számát adja meg, amelyek *ebben a pillanatban* az $\overline{AB}$ szakaszon találhatók.

Az $\mathcal{I}$ '-ben ugyanígy kell eljárnunk. Azonban az $\mathcal{I}$ '-ben egyidejű események $\mathcal{I}$-hez viszonyítva már nem történnek ugyanabban a pillanatban: Az A-beli esemény $\Delta t = V \cdot l' / \left(c^2\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)$ idővel később következik be, mint a B-beli. (Ld. az 1. feladatot. Az $\mathcal{I}$ ' felel meg a vonatnak, amely most negatív irányban halad.) A képletben azért szerepel az $\overline{AB}$ szakasz $\mathcal{I}$ '-beli l' hossza, mert most két $\mathcal{I}$ *'-ben egyidejű* esemény $\mathcal{I}$-beli időkülönbségére vagyunk kíváncsiak. A Lorentz-kontrakció következtében $l' = l\sqrt{1 - V^2/c^2}$, ezért $\Delta t = V \cdot l/c^2$.

Az Autó$_1$ tehát nem $T = l/v$, hanem $T' = T + \Delta t$ ideig tartózkodik $\overline{AB}$-n belül. Ezalatt $T'/\Delta\tau$ autó halad át A-n, ezért

$$N'_+ = \frac{T'}{\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau}(T + \Delta t) = \frac{l}{v \cdot \Delta\tau} \cdot \left(1 + \frac{vV}{c^2}\right) = N \cdot \left(1 + \frac{vV}{c^2}\right). \tag{B}$$

Ugyanezt az eredményt egy másik gondolatmenettel is megkaphatjuk, amelyből azonban nem látszik ilyen plasztikusan az egyidejűség relativitásának a szerepe. Az (A)-t úgy alakíthatjuk át az N'_+-ra vonatkozó képletté, hogy figyelembe vesszük a Lorentz-kontrakciót ($l \to l\sqrt{1 - V^2/c^2}$), az idődilatációt ($\Delta\tau \to \Delta t = \Delta\tau/\sqrt{1 - V^2/c^2}$), és a sebességösszeadás törvényét, amely szerint az autók sebessége $\mathcal{I}$ '-ben

$$u = \frac{v + V}{1 + vV/c^2}. \tag{C}$$

Az Autó$_1$ és a B pont távolsága $(u - V)$ sebességgel csökken, ez kerül (A) nevezőjében a v helyébe. Mindezeket (A)-ba írva rövid átalakítás után újra (B)-t kapjuk eredményül.

Amikor a v és a V iránya egymással ellentétes, akkor

$$N'_- = N \cdot \left(1 - \frac{vV}{c^2}\right). \tag{D}$$

Ebben az esetben az $\mathcal{I}$ '-beli egyidejűségnél $\mathcal{I}$-ben az A-beli esemény előbb történik, mint a B-beli, ez vezet az autók számának csökkenéséhez az $\overline{AB}$ szakaszon.

Ennek a látszólag mesterkélt feladatnak fontos fizikai alkalmazása van. Ahhoz azonban, hogy ehhez eljussunk, előbb egy paradoxonra kell rámutatnunk. Tegyük fel, hogy az utat fák szegélyezik, és $\mathcal{I}$-ben minden l hosszúságú szakaszon n fa található. Az $\overline{AB}$ szakaszon tehát $\mathcal{I}$-ben minden fára N/n autó jut.

Az $\mathcal{I}$ '-höz viszonyítva azonban más a helyzet. A fák száma az $\overline{AB}$ szakaszon továbbra is n marad, az autók száma azonban N-ről $N'_\pm$-ra változik, tehát az egy fára jutó autók száma a v és a V relatív irányától függően $(1 + vV/c^2)$-szeresére nő, vagy $(1 - vV/c^2)$-szeresére csökken. Ez azonban lehetetlen, mert se a fák, se az autók száma nem függhet attól, milyen inerciarendszerhez viszonyítjuk a pályát.

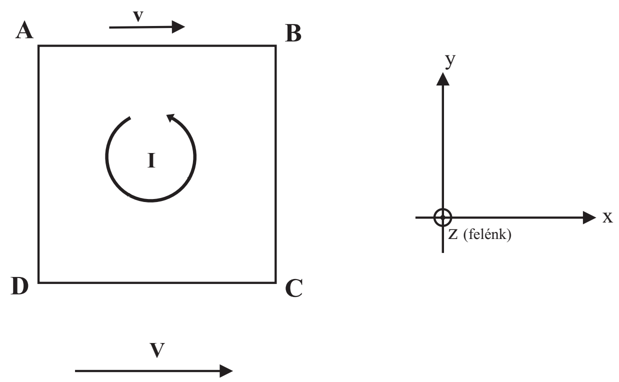
Ez a következtetés azonban csak ténylegesen végtelen hosszú autópályára érvényes, mert az nem lehetséges, hogy egy véges hosszúságú autópálya minden pontján azonosan $1/\Delta\tau$ gyakorisággal haladjon át egy autó. A paradoxon arra utal, hogy ebben a feladatban a pályát még idealizációként sem lehet végtelen hosszúnak tekinteni. Egy *önmagába záródó* pályára (hurokra) azonban ez a feltétel már teljesülhet. Ezért egészítsük ki az $\overline{AB}$ szakaszt egy $ABCD$ négyzetté, amelynek minden pontján $\Delta\tau$ időközönként halad át egy autó. Abban az $\mathcal{I}$-ben, amelyben a pálya nyugszik, az (A) szerint a négyzet mindegyik oldalán minden pillanatban átlagosan $N = l/(\Delta\tau \cdot v)$ autót találunk. Ahhoz az $\mathcal{I}$ '-höz viszonyítva azonban, amelyhez képest a pálya V sebességgel mozog az AB oldalon haladó autókkal párhuzamosan, az autók átlagszáma az AB oldalon $N'_+ = N(1 + vV/c^2)$-tel, a CD oldalon pedig $N'_- = (1 - vV/c^2)$-tel egyenlő. A V-re merőleges BC és DA oldalakon az átlagszám megmarad N-nek, mert egy V-re merőleges szakasz végpontjaiban történő $\mathcal{I}$-ben egyidejű eseménypár $\mathcal{I}$ '-ben is egyidejű marad.

A zárt $ABCD$ pályán található autók száma tehát mindig ugyanannyi, akármelyik inerciarendszerből figyeljük is meg. A pályának mint egésznek a mozgása ennek az adott autó-mennyiségnek az ***átcsoportosítására*** vezet a négyzet oldalai között. Ez az autók ***mozgásának*** a következménye. A pályát szegélyező fák száma ugyanis a négyzet oldalain külön-külön is változatlan marad, amikor a pályát különböző inerciarendszerekből szemléljük.

Helyettesítsük most az autópályát egy négyzetalakú fémkerettel, amelyben áram folyik. (Ld. a 9.1 ábrát; az áramforrást nem tüntetjük fel, azt is gondolhatjuk, hogy szupravezető keretünk van.) Az autók a mozgó elektronok, a fák a nyugvó pozitív ionok. A korábbi képleteink alapján az áramerősség

$$I = \frac{e}{\Delta\tau} = \frac{eNv}{l} \tag{E}$$

-lel egyenlő, amelyben e a proton elektromos töltése (az elektron töltésének abszolút értéke). Az autók v sebessége az elektronok sebességével egyenlő. Mivel



9.1 ábra

az elektronok töltése negatív, ezért az áram az autók sebességével ellentétes irányú.

Ez a köráram a saját $\mathcal{I}$ nyugalmi rendszerében egy $\mathbf{m}$ mágneses dipólnyomatékot hoz létre, amelynek csak a z-komponense különbözik zérustól (ld. az ábrát):

$$m_z = I \cdot l^2 = eNvl. \tag{F}$$

Ahhoz az $\mathcal{I}$'-höz viszonyítva azonban, amelyben ez a mágneses dipól V sebességgel mozog x irányban, y irányú elektromos dipólnyomatékra tesz szert, amelynek nagysága

$$p_y = (-e) \cdot (N'_+ - N) \cdot l = -e \cdot \frac{vV}{c^2} N \cdot l = -\frac{V}{c^2} m_z \tag{G}$$

-mel egyenlő, mert az AB szakaszon elektron többlet, a CD-n pedig ugyanakkora elektron hiány lép fel. Ha figyelembe vesszük, hogy V a $\mathbf{V}$ sebesség-vektor x komponense, a (G) összefüggést a vektoriális szorzat felhasználásával felírhatjuk tetszőleges koordinátarendszerben érvényes alakban:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{V} \times \mathbf{m}). \tag{H}$$

A mesterkéltnek látszó példa tehát arra a következtetésre vezetett, hogy *egy mozgó mágneses dipól elektromos dipólnyomatékra tesz szert.* Látjuk, hogy ez (is) az egyidejűség relativitásának a következménye.

HIBAJEGYZÉK

29.old. 5. sor: holdjáró **helyesen** marsjáró
30.old. 5. sor: egy egész időintervallum egyidejű, **helyesen** egy egész időintervallum lehet egyidejű

31.old. alulról az 5. sor: $\Delta\tau_a$ és $\Delta\tau_b$ **helyesen** $\Delta\tau_1$ és $\Delta\tau_2$
62.old. „...az érverése alapján állapította meg a mozgás idejét.” Ez nem egészen így történt. A *Matematikai érvelések és bizonyítások*ban (Európa 1986, 196.oldal) ugyanis Salviati (Galilei) így számol be a kísérletről:

> Kerestünk egy körülbelül tizenkét rőf hosszú, fél rőf széles, háromujjnyi vastag lécet, illetve deszkát, hosszában (az éle mentén) rendkívül egyenes, ujjnyi széles csatornát vájtunk, gondosan megtisztítottuk és megcsiszoltuk, majd a lehető legfinomabb, tökéletesen sima pergament enyveztünk bele; a csatornában pedig egy tökéletesen gömb alakú és sima bronzgolyót gurítottunk le. A léc egyik végét rögzítettük, a másikat pedig tetszésünk szerint egy- vagy kétrőfnyire a vízszintes fölé emeltük, és, mint említettem, hagytuk, hogy a golyó végiggurulјon a csatornában; gondosan megmértük a teljes mozgáshoz szükséges időt (mindjárt megmondom, hogyan); a kísérletet számtalanszor megismételve meggyőződtünk róla, hogy a futási idők soha még a pulzusütés tizedrészével sem térnek el egymástól. Miután a kísérletet sokszor elvégeztük, és az eredmény mindig ugyanaz volt, úgy intéztük, hogy a golyó csupán a csatorna negyedrészén gurulhasson le; ismét megmértük a mozgáshoz szükséges időt, és megállapítottuk, hogy a lehető legpontosabban fele az előzőnek. A kísérleteket különböző részutakkal is elvégeztük, a teljes út megtételéhez szükséges időt előbb a fél, majd a kétharmad és a háromnegyed úthoz szükséges idővel hasonlítottuk össze, valamint más osztásokkal is; a méréseket legalább százszor megismételtük, és mindig az volt az eredmény, hogy a megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint az idők négyzetei, és ez igaz, akárhogyan rögzítjük is a sík, illetve a csatorna (ahol a golyó legurul) vízszintessel bezárt szögét... Az időt pedig a következő módszerrel mértük: felakasztottunk egy nagy, vízzel teli dézsát, amelyből a fenekébe illesztett csövecskén keresztül vékony sugárban csordogált a víz; a kicsorgó vizet poharakban fogtuk fel mindaddig, amíg a vizsgált mozgás (a teljes csatorna vagy annak egy része mentén) tartott; az így összegyűjtött vizeket időről időre megmértük egy rendkívül pontos mérlegen, súlyaik különbségei és arányai megadták az időkülönbségeket és -arányokat, éspedig, mint említettem, olyan pontosan, hogy sok-sok mérés eredménye között nem volt tényleges eltérés.
>
> *Dávid Gábor fordítása*

87.old. középen: nyilván nyilván **helyesen nyilván** nyilván
87.old.: A (számozatlan) képlet hibás. **Helyesen**

$$v_k = \frac{V}{1-\sqrt{1-V^2/c^2}} > c.$$

89.old. 2. sor: (9.ábra) **helyesen** (10.ábra)
126.old. 16. sor: testek is **helyesen** testek pályái is
133.old. 3. sor: m/sec **helyesen** $\mathrm{m/s^2}$